



آزاده لاسرسی

مروړي

Comparative study of variational iteration and Homotopy Analysis semi analytical methods for Solving linear fractional differential equations

Mohammad Aslam Salehi ^{1*}, Hafizullah Amini ¹, Noorahman Hashimi¹

1.Department of Mathematics , Faculty of Education Wardak University, Wardak ,Af

Email: aslamsalihe@gmail.com

Abstract

In this study, two semi-analytical methods Variational Iteration Method (VIM) and the Homotopy Analysis Method (HAM) are compared for solving linear fractional differential equations. The comparison is based on error reduction, the stability of the methods, and their effectiveness in handling different types of equations. The strengths and weaknesses of these methods are presented in detail. Both methods are evaluated using representative examples, tables, and graphs, and their results are compared with the exact solutions. All numerical computations are carried out using the MATLAB software. A qualitative-analytical research approach is employed to achieve the objectives of the study. The results demonstrate that, for obtaining approximate solutions of linear fractional differential equations, the semi-analytical Homotopy Analysis Method provides higher accuracy and lower error when the controlling parameter hhh is chosen appropriately. In contrast, determining the exact Lagrange multiplier in the Variational Iteration Method requires more time and additional computational procedures, which reduces the overall efficiency of this method

Key Words : Linear fractional differential equations; semi-analytical methods; Variational Iteration Method; Homotopy Analysis Method

Article History:

Received: 01. Apr.2026

Accepted: 05. May.2026

Online First: 05. Aug.2026

Citation:

Salehi, M., et al. (2026).

Comparative study of variational iteration and Homotopy Analysis semi analytical methods for Solving linear fractional differential equations

Articles to W_{NNS}.

Wardak J of Soc Sci

2026;5(1):1-25

Email: rjd@wu.edu.af

This is an open access article under the Higher Education license



Copyright: © 2026

Published by Wardak

University.



الحمد لله رب العلمين والصلاة والسلام على سيد الأنبياء والمرسلين محمد، محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين.

د خطي کسري ديفرانسيل معادلو حل په اوسني عصر کې يوه مهمه او اساسي برخه ده. د دې ډول معادلو حل په درې ډوله ميتودونو (تحليلي ميتودونو، نيمه تحليلي ميتودون او عددې ميتودونو) لاسته راوړلای شو.

د نيمه تحليلي ميتودونو په مرسته د خطي کسري ديفرانسيل معادلو تقريبي حل پيدا کېږي؛ يعنې هغه کسري ديفرانسيل معادلې ورباندې حل کېږي، چې دقيق حل پيدا کول يې ستونزمن او يا ناممکن وي. په دې اساس په نيمه تحليلي ميتودونو کې د خطي کسري ديفرانسيل معادلو د حل لپاره اغېزمن او زيات د کارونې وړ ميتودونه تغير تکرار منونکي او هوموتوپي اناليز ميتودونه دي، چې هر يو يې خاصې ځانگړنې لري او د خطي کسري ديفرانسيل معادلو د بېلا بېلو ډولونو په حل کې کارول کېږي.

د خطي کسري ديفرانسيل معادلو د تقريبي حل لاسته راوړلو په موخه نيمه تحليلي ميتود تغير تکرار منونکی ميتود دی؛ چې په (1992)م کال يې نظريه د لومړي ځل لپاره د چينايي پوه هي له لوري وړاندې شوه (Chakraverty, 2010).

تغير تکرار منونکی ميتود اصلاً د لاگرانژ د ضريبونو د ميتود تعميم يافته شکل دی. دا ميتود د خطي او غيرې خطي کسري ديفرانسيل معادلو په شمول د ډېرو نورو مسايلو په حل کې کارول کېږي. په دې ميتود کې د لاگرانژ ضريب د تصحيح تابع د پيژندگلوی په موخه معرفي کېږي. د دې ميتود اصلي ځانگړنې ساده والی او انعطاف پذيري د خطي کسري ديفرانسيل معادلو حلول دي (صالحی، بيدار، & نوري، ۱۴۰۴). له بل پلوه د دې ميتود په مرسته دقيق حل ته د رسېدو لپاره د اضافي وخت د ضايع کېدو او اضافي عمليو ترسره کولو څخه مخنيوی کوي. دغه ميتود د تابع گانو يوه سلسله توليدوي، چې دقيق حل ته متقاربه وي (Zill & Cullen, 2009).

مروړي

آزاده لاسرسي

د هوموتوپي انالیز مېتود نظریه د لمړي ځل لپاره د خطي او غیري خطي کسري دیفرانسیلي معادلو لپاره د Liao پواسطه وړاندې شوه. هوموتوپي انالیز مېتود د $\hbar$ کمکي پارامتر، $H(t)$ کمکي تابع او L خطي پارامتر څخه تشکیل شوی دی، چې د $\hbar$ پارامتر پواسطه د سلسلي تقارب په آسانی سره کنټرولیري، د هوموتوپي انالیز نیمه تحلیلي مېتود په مرسته کسري دیفرانسیلي معادلې حلولای شو (حسینی، ۱۳۹۳).

که څه هم هوموتوپي انالیز مېتود یو پیاوړي نیمه تحلیلي مېتود گڼل کیږي، خو د خطي کسري دیفرانسیلي معادلو لپاره ددې مېتود تطبیق نسبتاً پیچلی او دروند دی، ددې دلیل دادی چې نوموړي مېتود یو شمیر اضافي برخو لکه د $\hbar$ پارامتر محاسبې ته اړتیا لري، د $\hbar$ پارامتر ټاکل ځانگړی تحلیل غواړي تر څو د حل تسلسل د دقیق حل سره همغږي وساتي او که دا انتخاب په سم ډول ونشي نو د حل دقت له منځه ځي او بې ثباته کیږي (Zill & Cullen, 2009). د نوموړي پارامتر په مرسته د تقریبي حل لپاره لاسته راغلې سلسله په آسانی سره دقیق حل ته تقرب کوي (Lavoie, Osler, & Tremblay, 1976)، (Shah & Naik, 2022).

کړنلاره

پدې څېړنه کې د کتابتونې مېتود څخه استفاده شوې ده. د کسري دیفرانسیلي معادلو د تقریبي حل لاسته راوړلو لپاره له نیمه تحلیلي میتودونو څخه استفاده کوو او د دې حل لاسته راوړلو لپاره د دیفرانسیلي معادلو د بېلابېلو ډولونو، کسري مشتقاتو او کسري انتیگرالونو څخه استفاده کېږي. همدارنگه د دې ډول حل دقیق ښودلو لپاره جدولونه او گرافونه کاروو چې د پیداکولو لپاره یې د Matlab اپلیکیشن څخه استفاده کیږي.

دیفرانسیلي معادله. هغه معادلې چې د تابع مشتقات یې د یو یا څو مستقلو متحولینو د مشتقاتو سره رابطه ولري، د دیفرانسیلي معادلې په نوم یادېږي (ZILL, 2009). عمومي شکل یې په لاندې ډول دی:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

آزاده لاسرسی

مروري

د خطي والي له پلوه د **دifferansiyali معادلو** ډلبندي. خطي **دifferansiyali معادلې** او غیرې خطي **دifferansiyali معادلې**.

خطي **دifferansiyali معادلې**. n -ترتیب عادي **دifferansiyali معادلې** خطي بلل کېږي. کله چې د $y, y', \dots, y^{(n)}$ مشتقاتو درجه یو وي او یا هغه **دifferansiyali معادلې** دي، چې لاندې شکل ولري (ZILL, 2009).

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0, \quad (2)$$

یا

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (3)$$

د (۳) معادلې دوه خاص حالتونه چې لومړۍ مرتبه $n = 1$ خطي او دویمه مرتبه $n = 2$ خطي **دifferansiyali معادلې** په لاندې ډول لیکلای شو:

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad . \quad a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (4)$$

د خطي تقاضلي معادلې د عمومي معادلې په پام کې نیولو سره یادې معادلې لاندې دوې خانگړنې لري: د $y, y', \dots, y^{(n)}$ درجې باید یو وي.

د $y, y', \dots, y^{(n)}$ ټول ضریبونه یعنې $a_1, a_2, \dots, a_n$ باید یوازې د مستقل متحول پورې تړلي وي.

غیر خطي **دifferansiyali معادلې**. هغه **دifferansiyali معادلې** چې خطي نه وي او یا هغه معادلې چې د مشتقاتو ترمنځ یې غیرې خطي رابطه موجوده وي او یا هم پخپل جوړښت کې مثلثاتي نسبتونه ولري غیر خطي **دifferansiyali معادلې** بلل کېږي (ZILL, 2009). لکه:

$$(1 - y)y'^2 + 2y = e^x \quad . \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \sin y = 0,$$

کسري **دifferansiyali معادلې**. کسري **دifferansiyali معادلې** هغه معادلې دي، چې مرتبه یا د مشتق درجه یې کسري عدد وي (Gorenflo & Mainardi, 2008).

عمومي شکل يې په لاندې ډول دی:

$$D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)). \quad (5)$$

يا

$a_n(x)D^{\alpha_n}y(t) + a_{n-1}(x)D^{\alpha_{n-1}}y(t) + \dots + a_0(x)D^{\alpha_0}y(t) - g(x) = 0$. چې دلته D^{α} نسبت د $y(t)$ تابع او t متحول ته د کسري مرتبې مشتق او همدارنگه α يو کسري عدد دی، چې د مشتق مرتبه ښيي. کسري ديفرانسيالي معادلې هم په عموم کې په لاندې دوه ډوله دي:

خطي کسري ديفرانسيالي معادلې. خطي کسري ديفرانسيالي معادلې هغه معادلې دي، چې د $y(t)$ تابع او د هغوی د D^{α} کسري مشتقاتو تر منځ خطي رابطه موجوده وي؛ يعنې د تابع او د هغې تفاضلات يوازې د ثابتو عددونو سره ضرب شوي وي. مثلاً:

$$D_t^{0,5}y(t) + 3D_t^{0,25}y(t) - 5y(t) = 0.$$

غیرې خطي کسري ديفرانسيالي معادلې. غیر خطي کسري ديفرانسيالي معادلې هغه معادلې دي، چې د $y(t)$ تابع او د هغې د D^{α} کسري مشتقاتو تر منځ غیرې خطي رابطه موجوده وي؛ يعنې د غیر خطي عملیو لکه ضرب، تقسیم، طاقت په شکل لیکل شوي وي (Gorenflo & Mainardi, 2008).

مثلاً:

$$D_t^{1,5}y(t) - 5y(t)^2 = \sin t.$$

کسري انتیگرال نیونه

د کسري مشتقاتو او انتیگرالونو اصلي مفهوم د صحیح مرتبې لرونکي مشتقاتو او انتیگرالونو څخه حاصلېږي. نو پر دې اساس په دغه برخه کې د ریمان لیوویل انتیگرال په اړه بحث کوو. د ریمان لیوویل کسري انتیگرال نیونه. د $f(t)$ متمادي تابع او $\alpha > 0$ لپاره د ریمان لیوویل کسري انتیگرال په لاندې ډول تعریفولای شو (Gorenflo & Mainardi, 2008).

آزاده لاسرسی

مروري

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (۶)$$

$\Gamma(\alpha)$ گاما تابع ده.

ځانگړنې.

$$I^{\alpha} [af(t) + bg(t)] = aI^{\alpha} f(t) + bI^{\alpha} g(t).$$

$$I^{\alpha} I^{\beta} f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t).$$

$$\text{for } n \in \mathbb{N} I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

$$I^{\alpha} t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} t^{k+\alpha}.$$

کسري مشتقات

په دې برخه کې د کسري مشتق نیونې دوه مهم میتودونه مطالعه کوو. په لومړي میتود کې مشتق او انتیگرال د متناهي او عمومي تفاضلاتو د حدودو په شکل فرض کېږي. دویم میتود هم د یوې تابع د تکراري انتیگرال تعمیم یافته شکل وړاندې کوي، چې ریمان لیوویل او کاپوتو میتودونه ددې میتود برخې جوړوي.

تعریف. د تابع د لومړنیو شرایطو په پام کې نیولو سره د کسري مشتقاتو لپاره لاندې څو فورمولونه موجود دي.

د ریمان لیوویل کسري مشتق. که چېرې $f(t)$ متمادي همواره تابع وي او $(\alpha > 0)$ پس د α مرتبه د ریمان لیوویل کسري مشتق عبارت دي له :

$$D_{RL}^{\alpha} f(t)$$

$$= \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right], & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \alpha = n. \end{cases} \quad (۷)$$

مروري

آزاده لاسرسي

کاپوتو کسري مشتق. کاپوتو کسري مشتق نیونه په انجینري او فزیکي موډلونو کې په پراخه کچه کارول کېږي؛ په ځانګړي ډول کله چې د ساده مشتق په مرسته لومړني شرایط وړاندې شوي وي. عمومي فورمول یې په لاندې ډول دی:

$$D_C^\alpha f(t) = \begin{cases} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \cdot \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n} d\tau \right], & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \alpha = n. \end{cases} \quad (A)$$

چې په هغه کې $n = [\alpha]$.

يادونه. د طاقت تابع ګانو کاپوتو کسري مشتق د لاندې فورمول په مرسته محاسبه کولای شو:

$$f(t) = t^p \Rightarrow D_C^\alpha t^p = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}, & n-1 < \alpha < n, p > n-1, p \in \mathbb{R} \\ 0 & n-1 < \alpha < n, p \leq n-1, p \in \mathbb{R} \end{cases}$$

موندنې

تغییر تکرار منونکی میتود

تغییر تکرار منونکی میتود د بېلابېلو خطي کسري دیفرانسیلي معادلو په حل کې کارول کېږي. د دې میتود مهمه ځانګړنه د هغه انعطاف پذیری او د پیچلو خطي دیفرانسیلي معادلو نسبتاً دقیق حل لاسته راوړل دي. په انجینري او ځینو نورو برخو کې د خطي کسري دیفرانسیلي معادلو داسې مسایل موجود دي، چې حلول یې ستونزمن دي. نو پر دې اساس د دې ډول ستونزو د حل لپاره تر ټولو مناسب میتود همدغه تغیر تکرار منونکی میتود دی (صالحی، بیدار، & نوري، ۱۴۰۴). په عمومي ډول د دې میتود په مرسته د خطي کسري دیفرانسیلي معادلې حل د یوې داسې سلسلې په شکل وړاندې کېږي، چې دقیق حل ته په سرعت سره تقرب کوي. په دې میتود کې د تقرب لپاره د لاګرانژ ضریب څخه استفاده کېږي او د دې ضریب ټاکل د خطي کسري دیفرانسیلي معادلې د حل په دقت مستقیم اغېز لري (He & Wu, 2007).

آزاده لاسرسی

مروري

د تغیر تکرار منونکي میتود په مرسته د دیفرانسیلي معادلې حل لپاره د لاگرانژ ضریب پیدا کول او د مسألې مربوطه ورکړل شوي لومړني شرایط په دقیق ډول خپل دي. د پورتنیو مرحلو په پام کې نیولو سره لاندې دیفرانسیلي معادله د تغیر تکرار منونکي میتود په مرسته په لاندې ډول حلوو:

$${}_0D_t^\alpha u + R[u] + N[u] = g(t), \quad (9)$$

د پورتنۍ معادلې د حل په موخه د تغیر تکرار منونکي میتود له تکراري رابطې څخه استفاده کوو:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_{t_0}^t \lambda(t, s) \{Ru_n(s) + Nu_n(s) - g(s)\} ds, \quad (10)$$

په پورتنی فومول کې $\lambda(t, s)$ د لاگرانژ عمومي ضریب، u_n ، n -مرتبته تقریبي حل دی. د لاگرانژ ضریب. د تغیر تکرار منونکي میتود لپاره د لاگرانژ ضریب د لاندې رابطې په مرسته پداسې ډول (Tomar, 2023).

$$\lambda(t, s) = \frac{(-1)^n (t - s)^{n-1}}{(n - 1)!}, \quad (11)$$

یادونه. د لاگرانژ ضریب د علامې ټاکل تر ډېره د معادلې په نوعیت او همدارنګه د ورکړل شویو لومړنیو شرایطو په پام کې نیولو سره ټاکل کېږي. په داسې حال کې چې د ډېرو متجانسو کسري دیفرانسیلي معادلو لپاره د لاگرانژ ضریب علامه منفي (Bulut, 2013) او غیري متجانسو کسري دیفرانسیلي معادلې لپاره مثبت په پام کې نیول کېږي (Belghaba, 2022).

د تغیر تکرار منونکي میتود ښیګڼې

ساده جوړښت او آسانه محاسبه. تغیر تکرار منونکي میتود د تکراري انتګرالي فورمول پر بنسټ ولاړ دی، چې جوړښت یې ساده او مستقیم دی. دغه میتود د لاگرانژ د ضریب پر اساس یو نسبتاً دقیق تقریبي حل وړاندې کوي، چې له پېچلو مشتقاتو یا عددې محاسبو پرته هم دقیق حل ته نږدې کېږي. دا ساده جوړښت د دې لامل شوی، چې تغیر تکرار منونکي میتود نه یوازې د ساده

معادلو لپاره، بلکې د ستونزمنو خطي کسري ديفرانسيل معادلو لپاره هم وکارول شي (He & Wu, 2007).

دقيق حل ته متقاربه سلسله وړاندې کوي. د تغير تکرار منونکي ميتود ځانگړی امتياز دا دی، چې د حل لپاره يوه داسې سلسله توليدوي، چې که ورکړل شوی لومړنی شرط يې مناسب وي؛ نو د تکراري رابطې له لارې حل ته ژر نږدې کېږي. دا سلسله په عمومي ډول (مونوتون) يوه خوا متقاربه وي او په کم شمېر حدونو سره دقيق حل ته تقارب کو. د دې خاصيت له امله دا ميتود نه يوازې دقيق دی، بلکې د محاسبوي وخت له نظره هم اغېزناک گڼل کېږي (Bassi & Ismail, 2022).

انعطاف پذير دی. تغير تکرار منونکی ميتود د انعطاف پذير ميتود په توگه پېژندل شوی؛ ځکه دا د مختلفو ډولونو ديفرانسيل معادلو لپاره کارېږ؛ لکه معمولي، قسمي او کسري ديفرانسيل معادلې. دا ميتود همدا راز د (coupled systems delay differential equations) او (boundary value problems) لپاره هم اغېزمن ثابت شوی. دا پراخه تطبيق دا ښيي، چې تغير تکرار منونکی ميتود د هر ډول رياضيکي سېسټمونو لپاره يو عمومي تطبيقېدونکی ميتود دی (Odibat, 2007).

د تغير تکرار منونکي ميتود نيمگړتياوې

د ورکړل شويو لومړنيو شرايطو سره حساسيت. د تغير تکرار منونکي ميتود يوه نيمگړتيا دا ده، چې د حل کيفيت او تقاربي سرعت په زياته کچه د لومړني شرط يا ابتدايي حل تابع دي. که چېرې لومړنی شرط مناسب انتخاب نه ش؛ نو ممکن دا ميتود يا خو مطلوب حل ته ونه رسېږي، يا ډېر ورو تقارب وکړي (Bassi & Ismail, 2022).

د لاگرانژ ضريب ټاکل ممکن ستونزمن وي. که څه هم د تغير تکرار منونکي ميتود بنسټ د لاگرانژ د ضريب پر ټاکلو ولاړ دی، خو په عملي ډول د دغه ضريب د ټاکلو بهير تل ساده نه وي. دا ضريب بايد د واريشنل اصولو له مخې داسې وموندل شي، چې د حل لپاره دقيق اصلاحات ورکړي، خو د ډېرو معادلو لپاره دا کار يا تخنيکي پېچلتيا لري يا ممکن تحليلي حل ونه لري. دا ستونزه په خاص ډول د قسمي او پېچلو کسري ديفرانسيل معادلو لپاره زيات ليدل شوې ده (Wu, 2011).

آزاده لاسرسی

مروري

۱- قضیه: که چېرې $u_n(t)$ د تقریبي حل n -ام حد او $u(t)$ دقیق حل وي، پس د تغیر تکرار منونکي نیمه تحلیلي میتود خطا د لاندې رابطې په مرسته پیدا کېږي. د $k > 0$ ثابت او $u_0(t)$ لومړني شرط په پام کې نیولو سره خطا په لاندې ډول لیکلای شو:

$$E_N(t) = |u(t) - u_N(t)| \leq \frac{(kt)^N}{N!} C, \quad (12)$$

یادونه. په پورتنیو نامساواتو کې د k ثابت د کسري دیفرانسیلي معادلې د خطي یا غیرې خطي برخې ضریب او C د معادلې د دقیق حل لوړې مرتبې مشتق پورې اړه لري. [He, 1999] یعنې

$$C = \max_{t \in [0, T]} |u^{(N)}(t)|, \quad (13)$$

هوموتوپي انالیز میتود

د هوموتوپي انالیز میتود نظریه د لمړي ځل لپاره د خطي او غیري خطي کسري دیفرانسیلي معادلو لپاره د Liao پواسطه وړاندې شوه. هوموتوپي انالیز میتود د $\hbar$ کمکي پارامتر، $H(t)$ کمکي تابع او L خطي پارامتر څخه تشکیل شوی دی، چې د $\hbar$ پارامتر پواسطه د سلسلي تقارب په آسانی سره کنترولېږي، د هوموتوپي انالیز نیمه تحلیلي میتود په مرسته کسري دیفرانسیلي معادلې حلولای شو.

که څه هم هوموتوپي انالیز میتود یو پیاوړي نیمه تحلیلي میتود گڼل کېږي، خو د خطي کسري دیفرانسیلي معادلو لپاره ددې میتود تطبیق نسبتاً پیچلي او دروند دي، ددې دلیل دادی چې نوموړی میتود یو شمیر اضافي برخو لکه د $\hbar$ پارامتر محاسبې ته اړتیا لري، د $\hbar$ پارامتر ټاکل ځانگړي تحلیل غواړي تر څو د حل تسلسل د دقیق حل سره همغږی وساتي او که دا انتخاب په سم ډول ونشي نو د حل دقت له منځه ځي او بی ثباته کېږي (Zill & Cullen, 2009). د خطي کسري دیفرانسیلي معادلو لپاره تر ډیره د یاد میتود نه کارول کېږي، ځکه په نوموړي میتود کې ځیني اوږدي او پیچلي عمليې ترسره کېږي چې ډیر وخت ته اړتیا لري، پداسې حال کې چې د غیري خطي کسري دیفرانسیلي معادلو د حل لپاره د کنترولونکي پارامتر په لرلو سره یو اغیزمن

آزاده لاسرسی

مروري

مېتود دي، د نوموړي پارامتر په مرسته د تقریبي حل لپاره لاسته راغلي سلسله په آسانی سره دقیق حل ته تقریب کوي (Lavoie, Osler, & Tremblay, 1976), (Shah & Naik, 2022).

لاندې کسري دیفرانسلې معادله په پام کې نیسو:

$$D^{\alpha}u(t) = N(u) + g(t), \quad t > 0 \quad (13)$$

چې په هغه کې $m - 1 < \alpha \leq m$ او N غیر خطي پارامتر دی، ممکن کسري مشتق ولري، $g(t)$ کمکي تابع او D^{α} د کاپوتو مشتق دي.

د صفرې مرتبې تغیر شوي معادلې څخه لیکلای شو:

$$(1 - q)L[\phi(t, q) - \phi_0(t)] = qhH(t) \left(D^{\alpha}\phi(t, q) - N(\phi(t, q)) - g(t) \right), \quad (14)$$

په (۱۴) رابطه کې $q \in [0, 1]$ د هوموتوپي پارامتر، $h \neq 0$ کمکي پارامتر، $H(t) \neq 0$ کمکي تابع، $\phi_0(t)$ د مسلي لپاره راکړل شوي اولیه شرط او L خطي اپراتور دي چې په لاندې ډول تعریف شوي دي.

$$L = \frac{d^m}{dt^m} \quad \text{یا} \quad L = \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}},$$

په (۱۴) رابطه کې کله چې $q = 0$ شي معادله $L[\phi(t; 0) - \phi_0(t)] = 0$ شکل غوره کوي، او کله چې $q = 1$ شي نوموړي معادله د (۱۳) معادلې شکل ځانته غوره کوي،

$$D^{\alpha}u(t) = N(u) + g(t),$$

د یادوني وړ ده کله چې د q قیمت له ۰ څخه ۱ ته تغیر کوي د معادلې حل هم له $u_0(t)$ څخه اصلي حل $u(t, 1)$ ته نږدې کیږي.

ددې مېتود مهمه ځانگړنه داده چې د معادلې حل د طاقت د سلسلې په شکل نسبت د q متحول ته په لاندې ډول وړاندې کوي.

$$\phi = \phi_0 + q\phi_1 + q^2\phi_2 + \dots$$

پورتنی سلسله په (۱۴) معادله کې وضع کوو او نسبت د q ته مشابه حدونه په مساوي کولو سره لاندې لوړ ترتیب تغیر شوي معادله ترلاسه کوو:

$$\begin{aligned} L[\phi_1] &= \hbar H(D^\alpha \phi_0 - N_0(\phi_0) - g(t)), \\ L[\phi_2] &= L[\phi_1] + \hbar H(D^\alpha \phi_1 - N_1(\phi_0, \phi_1)), \\ L[\phi_3] &= L[\phi_2] + \hbar H(D^\alpha \phi_2 - N_2(\phi_0, \phi_1, \phi_2)). \end{aligned}$$

کله چې

$$N(\phi_0 + q\phi_1 + q^2\phi_2 + \dots) = N_0(\phi_0) + qN_1(\phi_0, \phi_1) + \dots$$

وي، پس د (۱۳) معادلې تقریبي حل په لاندې ډول په لاس راځي

$$u(t) = \lim_{q \rightarrow 1} \phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots$$

په هوموتوپي انالیز مېتود کې مهمه برخه د $\phi_0 = u_0$ قیمت ټاکل دي، ددې په موخه د (۱۳) معادلې د دواړو لورو څخه I^α نیسو او لیکو:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} + I^\alpha N(u) + I^\alpha g(t), \quad t > 0$$

په پورتنۍ معادله کې د $I^\alpha N(u)$ څخه صرف نظر کوو او د ϕ_0 قیمت په لاندې ډول لاسته راځي.

$$\phi_0 = \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} + I^\alpha g(t),$$

ددې اولیه حل په مرسته نور حلونه چې دقیق حل ته نږدې وي پیدا کولای شو (Sachin, Devi*, & Kumbinarasaiah, 2024).

د یادونې وړ ده چې د کسري دیفرانسلې معادلې د حل لپاره ډیری وخت اولیه شرط ورکړل شوي وي، خو د نشتون په صورت کې یې د پورتنۍ رابطې په مرسته پیدا کولای شو.

د $\hbar$ کنټرولونکې پارامتر ټاکل: د $\hbar$ پارامتر لپاره مناسب قیمت د باقی مانده خطا په مرسته پیدا کولای شو.

د باقی مانده خطا (residual error): هغه خطا ده چې د تقریبي حل د محدود شمیر حدونو او اصلي حل د توپیر څخه لاسته راځي، او په لاندې ډول پیدا کیري.

$$Res(h) = \int_0^T [R_m(t; h)]^2 dt = \int_0^T [N[u_m(t; h)]]^2 dt, \quad (۱۵)$$

پورتنی فورمول د خطا موندنې یو معیاري فورمول دي چې د تقریبي حل دقت ارزوي. یعنې که چیرې پورتنی قیمت کوچنی وي، د تقریبي حل دقت زیات دی (Odibata, Momanib, & Xu, 2010).

یادونه: د h پارامتر لپاره غوره قیمت هغه دي چې په هغه کې $Res(h)$ کوچنی وي.

د هوموتوپي انالیز مېتود ښیځنې

د (h) د کنټرول پارامتر لړل. د هوموتوپي انالیز مېتود یوه مهمه ځانگړنه چې نور نیمه تحلیلي مېتودونه یې نلري د کنټرول پارامتر (h) له لارې د حل د تقرب سرعت او دقت کنټرولوي. نوموړي پارامتر موږ ته اجازه راکوي چې د حل سلسله د دقیق حل پیدا کولو لپاره د مېتود تقرب ښه مدیریت کړو، کوم چې په نورو مېتودونو کې نشته (J.Liao, 2004).

د تحلیلي او عددي حلونو ترکیب. هوموتوپي انالیز مېتود د هغه نیمه تحلیلي مېتودونو څخه دی چې د تحلیلي سلسلې په شکل حل وړاندې کوي، خو د عددي تکرار له لارې د حل دقت او تقرب تضمینوي. دا ترکیب د حل کولو په بهیر کې دقت زیاتوي او ستونزمنې معادلې په ساده ډول تحلیلوي (H.Shang, 2010).

د اولیه شرایطو حساسیت کمول. هوموتوپي انالیز مېتود د اولیه تخمینې ټاکل شویو شرایطو حساسیت کموي، ځکه چې د کنټرول پارامتر په مرسته کولای شي د حل مسیر بدل کړي او د مناسب حل لور ته حرکت وکړي، چې دا د نورو مېتودونو په پرتله یوه مهمه ځانگړنه ده (J.Liao, 2004).

د هوموتوپي انالیز مېتود نیمګړتیاوې

د مناسب کنټرولونکې پارامتر موندل ستونزمن وي. د هوموتوپي انالیز مېتود د بريالیتوب یوه کلیدي برخه د کنټرول پارامتر h ټاکل دي، خو دا کار په ځینو مسلو کې سخت او تجربوي وي، چې که سم پارامتر ونه ټاکل شي، حل ممکن غلط تقرب ولري یا بې ثباته شي (J.Liao S. X., 2007).

د حسابي بار لوړوالی. د هوموتوپي انالیز مېتود د پیچلو مسلو لپاره د پرله پسې لوړه درجه یا ډېر حدونه اخیستل کيږي چې دا د محاسبوي وخت او زیاتو عملیو ترسره کولو لامل ګرځي، په ځانګړي ډول په څو بعدي او لویو سیستمونو کې (Artical, 2025).

۲. قضیه: د یوې کسري دیفرانسلې معادلې لپاره د هوموتوپي مېتود خطا د لاندې رابطې په مرسته محاسبه کيږي.

$$E_N = \|u(t) - u_N(t; h)\| \leq \frac{A}{(N+1)!} (|h|B)^{N+1}, \quad (16)$$

په پورتنیو نامساواتو کې A د دقیق حل $u(t)$ لوړې مرتبې مشتق او B د معادلې د غیري خطي برخې د قسمي مشتق څخه لاسته راځي.

$$A = \max_{t \in [0, T]} |u^{(N+1)}(t)|, \quad B = \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial N(u(t))}{\partial u(t)} \right|, \quad (17)$$

یادونه: پورتنی نامساوات په ښکاره ډول د A, B, h ترمنځ رابطه ښيي او د h قیمتونو په مرسته کنټرول کيږي.

توضیحي مثال: ددې په موخه چې پورتنی دوه نیمه تحلیلي میتودونه د خطي کسري دیفرانسلې معادلو لپاره په ښه ډول پرتله کړو دلته یو عددي مثال په پام کې نیسو او خطا یې د قضیو په مرسته محاسبه کوو.

آزاده لاسرسي

مروري

مثال: لاندې خطي کسري ديفرانسيالي معادله د تغيړ تکرار منونکي او هوموتوپي اناليز نيمه تحليلي ميتودونو په مرسته حل کړي او وښايست چې د نوموړي کسري ديفرانسيالي معادلې د تقريبي حل لاسته راوړلو لپاره کوم نيمه تحليلي ميتود ډېر اغېزمن دی؟

$$D^{\alpha}u(t) + 2u(t) = t \quad , \quad u(0) = 0 \quad .$$

$$0 < \alpha \leq 1 \quad , \quad t \in [0,1]$$

اوس پورتنۍ کسري ديفرانسيالي معادله د تغيړ تکرار منونکي ميتود په مرسته حلو او خطايي تحليلوو.

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_{t_0}^t \lambda(t,s) \{Ru_n(s) + Nu_n(s) - g(s)\} ds$$

$$\lambda(t-s) = \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad , \quad u(0) = 0 \Rightarrow u_0(t) = 0$$

$$u_1(t) = u_0(t) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \{D^{\alpha}u_0(s) + 2u_0(s) - s\} ds$$

$$= 0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \{D^{\alpha}(0) + 2(0) - s\} ds$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s ds = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{1+\alpha-1+1} B(1+1, \alpha-1+1)$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(2, \alpha) t^{\alpha+1}$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} \Rightarrow u_1(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1}$$

د پورتنۍ الگوريتم په مرسته د نوموړي ديفرانسيالي معادلې د تقريبي حل نور حدونه په لاندې ډول دي:

$$u_2(t) = -\frac{2}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} - \frac{3}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1}$$

$$u_3(t) = -\frac{4}{\Gamma(3\alpha+2)} t^{3\alpha+1} - \frac{10}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} - \frac{7}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1}$$

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots$$

$$u(t) = -\frac{4}{\Gamma(3\alpha+2)} t^{3\alpha+1} - \frac{12}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} - \frac{11}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} + \dots$$

د تغیر تکرار منونکي میتود خطاء په لاندې ډول محاسبه کوو:

$$k = 2 \quad . \quad C = \max_{t \in [0, T]} |u^{(N)}(t)| = \max_{t \in [0, T]} \left| \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}(1 - e^{-2t}) \right)^{(N)} \right|$$

$$N = 1 \Rightarrow C = \max_{t \in [0, 2]} \left| \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}(1 - e^{-2t}) \right)' \right| = \max_{t \in [0, 2]} \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(2e^{-2t}) \right|$$

$$= \max_{t \in [0, 2]} \left| \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}) \right| = 1$$

$$E_N(t) = |u(t) - u_N(t)| \leq \frac{(kt)^N}{N!} C$$

$$E_1(1) = |u(1) - u_1(1)| \leq \frac{(kt)^1}{1!} C = C(kt) = 1 \cdot 2t = 2$$

په همدې ترتیب د نورو حدونو لپاره خطاء په لاندې ډول ده:

$$E_2(1) = 2$$

$$E_3(1) = 2,6666$$

$$E_1 = E_2 < E_3$$

اوس ياده خطي کسري ديفرانسلې معادله د هوموتوپي انالیز میتود په مرسته حلوو

$$D^\alpha u(t) + 2u(t) = t$$

لمړي د پورتنۍ معادلې هوموتوپي معادله تشکیلوو

$$(1 - q)L[\phi(t; q) - \phi_0(t)] = q\hbar H(t) (D^\alpha(\phi(t; q)) - g(t))$$

$$(1 - q)L[\phi(t; q) - \phi_0(t)] = q\hbar H(t) (D^\alpha(\phi(t; q)) + \phi(t; q) - t)$$

$$(1 - q)L[\phi_0(t) + q\phi_1(t) + q^2\phi_2(t) + q^3\phi_3(t) + \dots - \phi_0(t)]$$

$$= q\hbar H(t) (D^\alpha(\phi_0(t) + q\phi_1(t) + q^2\phi_2(t) + q^3\phi_3(t) + \dots) + 2(\phi_0(t) + q\phi_1(t) + q^2\phi_2(t) + q^3\phi_3(t) + \dots) - t)$$

$$\Rightarrow qL[\phi_1(t)] + q^2L[\phi_2(t)] + q^3L[\phi_3(t)] + \dots - q^2L[\phi_1(t)] - q^3L[\phi_2(t)] - q^4L[\phi_3(t)] - \dots$$

$$= q\hbar H(t) [D^\alpha(\phi_0(t) + q\phi_1(t) + q^2\phi_2(t) + q^3\phi_3(t) + \dots)] + 2q\hbar H(t) [\phi_0(t) + q\phi_1(t) + q^2\phi_2(t) + q^3\phi_3(t) + \dots] - q\hbar H(t) [t]$$

په پورتنیو رابطه کې کمکي تابع $H(t) = 1$ وضع کوو او په ساده کوو یې:

$$\Rightarrow qL[\phi_1(t)] + q^2L[\phi_2(t)] + q^3L[\phi_3(t)] + \dots - q^2L[\phi_1(t)] - q^3L[\phi_2(t)] - q^4L[\phi_3(t)] - \dots$$

$$= q\hbar D^\alpha[\phi_0(t)] + q^2\hbar D^\alpha[\phi_1(t)] + q^3\hbar D^\alpha[\phi_2(t)] + \dots +$$

$+2q\hbar\phi_0(t) + 2q^2\hbar\phi_1(t) + 2q^3\hbar\phi_2(t) + 2q^4\hbar\phi_3(t) \dots - q\hbar t$
د پورتنیو مساواتو دواړه لوري د q د توان په اساس په لاندې ډول سره مقایسه کوو، او د مشتق اپراتور په $L = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = D^\alpha$ ډول لیکو.

$$\begin{aligned} q^1 : \quad D^\alpha \phi_1 &= \hbar(D^\alpha \phi_0 + 2\phi_0 - t) \\ q^2 : \quad D^\alpha \phi_2 &= D^\alpha \phi_1 + \hbar D^\alpha \phi_1 + 2\hbar\phi_1 = (1 + \hbar)D^\alpha \phi_1 + 2\hbar\phi_1 \\ q^3 : \quad D^\alpha \phi_3 &= D^\alpha \phi_2 + \hbar D^\alpha \phi_2 + 2\hbar\phi_2 = (1 + \hbar)D^\alpha \phi_2 + 2\hbar\phi_2 \\ &\dots \\ q^n : \quad D^\alpha \phi_n &= D^\alpha \phi_{n-1} + \hbar D^\alpha \phi_{n-1} + 2\hbar\phi_{n-1} = (1 + \hbar)(D^\alpha \phi_{n-1}) + \phi_{n-1} \end{aligned}$$

$\phi_0 = 0$ د اولیه شرط په پام کې نیولو سره او د کاپو تو کسري انتیگرال څخه په استفاده له پورتنیو رابطو څخه $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ قیمتونه په لاندې ډول محاسبه کوو:

$$\begin{aligned} I^\alpha[D^\alpha \phi_1] &= I^\alpha[\hbar(D^\alpha \phi_0 + 2\phi_0 - 3t)] \Rightarrow \phi_1 \\ &= \hbar(I^\alpha[D^\alpha \phi_0] + 2I^\alpha[\phi_0] - I^\alpha[t]) \\ \phi_1 &= -\hbar(I^\alpha[t]) = -\hbar \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+\alpha+1)} t^{\alpha+1} = -\hbar \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} \Rightarrow \phi_1 \\ &= -\hbar \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} \\ &= \phi_2 = -\hbar(1+\hbar) \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} - 2\hbar^2 \frac{1}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} \\ I^\alpha[D^\alpha \phi_3] &= I^\alpha[(1+\hbar)D^\alpha \phi_2 + 2\hbar\phi_2] \Rightarrow \phi_3 = (1+\hbar)I^\alpha[D^\alpha \phi_2] + 2\hbar I^\alpha[\phi_2] \\ &\Rightarrow \phi_3 = -(1+\hbar)2\hbar^2 \frac{1}{\Gamma(3\alpha+2)} t^{3\alpha+1} \\ &\quad - (1+\hbar)4\hbar^2 \frac{1}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} - \hbar(1+\hbar)^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} \\ &\dots \\ u(t) &= \lim_{q \rightarrow 1} \phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots \\ u(t) &= 0 - \hbar \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} - \hbar(1+\hbar) \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} - 2\hbar^2 \frac{1}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} \\ &\quad - (1+\hbar)2\hbar^2 \frac{1}{\Gamma(3\alpha+2)} t^{3\alpha+1} \\ &\quad - (1+\hbar)4\hbar^2 \frac{1}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} - \hbar(1+\hbar)^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(t) = -(1 + \hbar)2\hbar^2 \frac{t^{3\alpha+1}}{\Gamma(3\alpha+2)} - (6\hbar^2 + 4\hbar^3) \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} - (3\hbar + 3\hbar^2 + \hbar^3) \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \dots$$

اوس د پورتنۍ خطي کسري ديفرانسلي معادلې خطا د هوموتوپي مېتود لپاره محاسبه کوو او لیکو: دا چې راکړل شوي کسري ديفرانسلي معادله خطي ده، نو غبري خطي برخه يې صفر ده په نتيجه کې د B قيمتونو څخه صرف نظر کيږي.

$$A = \max_{t \in [0, T]} |u^{(N+1)}(t)|, \quad B = \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{\partial N(u(t))}{\partial u(t)} \right|$$

$$N = 1 \Rightarrow A = \max_{t \in [0, 2]} \left| \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}(1 - e^{-2t}) \right)'' \right| = \max_{t \in [0, 2]} \left| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(2e^{-2t}) \right)' \right|$$

$$= \max_{t \in [0, 2]} |e^{-2t}| = e^{-2(0)} = 1$$

$$E_N = \|u(t) - u_N(t; h)\| \leq \frac{A}{(N+1)!} (|h|)^{N+1}$$

$$E_1 = \|u(t) - u_1(t; h)\| \leq \frac{1}{(1+1)!} (|h|)^{1+1} = \frac{1}{2!} (|-0,5|)^2 = \frac{0,25}{2} = 0,125$$

$$E_2 = \|u(1) - u_2(1; h)\| \leq \frac{2}{6} (|-0,5|)^3 = \frac{1}{3} (0,125) = 0,041$$

$$E_3 = \|u(t) - u_3(t; h)\| \leq \frac{A}{4!} (|h|)^4 = \frac{4}{4!} (|-0,5|)^4 = \frac{4}{24} (0,0625) = 0,0101$$

$$\Rightarrow E_1(t) > E_2(t) > E_3(t) > \dots$$

$$\Rightarrow 0,125 > 0,041 > 0,010 > \dots$$

د هوموتوپي اناليز مېتود په مرسته د خطا د پورتنیو سرحدونو يو متقارب ردیف حاصل شو، نو ويلي شو چې د زيات شمير حدونو په پيدا کولو سره دقيق حل ته لانور نيردي کيږي. د پورتنۍ خطي کسري ديفرانسلي معادلې د هوموتوپي اناليز او تغير تکرار منونکي نيمه تحليلي مېتودونو خطا په لاندې جدول کې په لنډ ډول د مقايسي په موخه لیکو:

۱ جدول: د پورتنۍ معادلې د خطا مقايسه

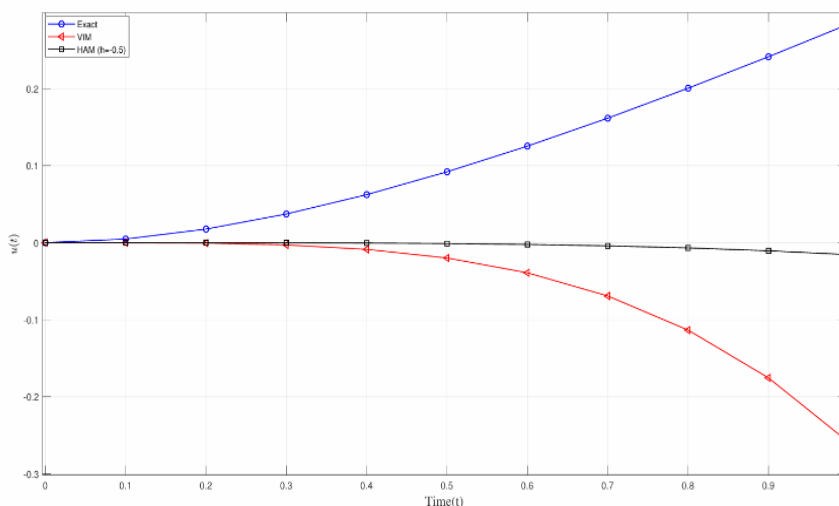
د حد خطاء

تغير تکرار منونکي مېتود

هوموتوپي اناليز مېتود

$E_1(t)$	2,000	0.125
$E_2(t)$	2,000	0.041
$E_3(t)$	2,666	0.010

له ۱. جدول څخه لیدل کیږي دا چې د پورتنی خطي کسري دیفرانسلې معادلې لپاره چې د تغیر تکرار منونکی میتود خطاء زیاته او د خطاء ردیف یې له دریم حد وروسته متزاید دی او د هوموتوپي انالیز میتود خطاء کمه او د خطاء ردیف یې چټک تناقص کوي نو د پورتنی کسري دیفرانسلې معادلې لپاره هوموتوپي انالیز میتود نسبت تغیر تکرار منونکی میتود ته اغیزمن میتود دی. د پورتنی خطي کسري دیفرانسلې معادلې لپاره د هوموتوپي انالیز او تغیر تکرار منونکي نیمه تحلیلي میتودونو خطا د متحول د مختلفو قیمتونو لپاره په لاندې جدول کې په لنډ ډول د مقایسې په موخه لیکو او د ښه وضاحت په موخه یې په گراف کې ښیو.



۱. گراف: د پورتنی معادلې لپاره د حلونو مقایسوي گراف

۲ جدول: د پورتنۍ معادلې د خطا مقایسوي جدول

t	دقیق حل ($\alpha = 1$)	تکرار منونکی مېتود	تکرار منونکی مېتود خطا	هوموتوپي انالیز مېتود	هوموتوپي انالیز مېتود خطا
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.0047	-0.00005	0.0047	$-3,108 \times 10^{-6}$	0.0046
0.20	0.0176	-0.0006	0.0182	-0.00004	0.0176
0.30	0.0372	-0.0030	0.0402	-0.00018	0.0373
0.40	0.0623	-0.0087	0.0710	-0.00052	0.0628
0.50	0.0920	-0.0199	0.1119	-0.00119	0.0931
0.60	0.1253	-0.0391	0.1644	-0.00235	0.1276
0.70	0.1616	-0.0692	0.2309	-0.00416	0.1658
0.80	0.2005	-0.1135	0.3139	-0.00682	0.2072
0.90	0.2413	-0.1755	0.4168	-0.01055	0.2518
1.00	0.2838	-0.2592	0.5430	-0.01558	0.2994

له پورتنیو جدولونو او گراف څخه په ښکاره ډول لیدل کېږي، چې د خطي کسري دیفرانسلې معادلې لپاره د $\hbar$ دقیق قیمت په ټاکلو سره هوموتوپي انالیز مېتود د خطا ردیف تقارب د صفر لوري ته چټک دي نو د پورتنۍ کسري دیفرانسلې معادلې لپاره یو اغیزمن مېتود دی، پداسې حال کې چې د تغیر تکرار منونکي مېتود د خطا زیاته او د دقیق لاگرائز ضریب پیدا کول ستونزمن دي چې دا کړنه د نوموړي مېتود اغیزمنتیا د خطي کسري دیفرانسلې معادلو د حل لپاره کموي.

بحث او مناقشه

مروري

آزاده لاسرسی

خطي کسري ديفرانسلي معادلې د انجينري او فزيک په ډيرۍ برخو کې کارول کيږي ددې ديفرانسلي معادلو په مرسته کولای شو پېچلې فزيکې او د انجينري موضوعات موډل کړو. داچې د خطي کسري ديفرانسلي معادلو د تقريبي حلولو د لاسته راوړلو لپاره ډير شمير نيمه تحليلي مېتودونه شتون لري چې په مرسته يې کولای شو يادي معادلې حل کړو، خو ددې معادلو د تقريبي حل لاسته راوړلو لپاره نيمه تحليلي مېتودونه کارول کيږي ددې په موخه چې د لاسته راغلي حل دقت زيات او خطا کمه شي د نيمه تحليلي مېتودونو په منځ کې هغه مېتود انتخابوو چې مؤثريت يې زيات وي. پدې مقاله کې دوه مؤثر نيمه تحليلي مېتودونه (هوموتوپي اناليز مېتود او تغير تکرار منونکي مېتود) ټاکل شوي دي، چې په نوموړو مېتودونو کې د کنترول پارامتر او لاگرانژ ضريب شتون لري چې د هغه په مرسته کولای شو پېچلي خطي کسري ديفرانسلي معادلې د ساده عمليو پواسطه په کم وخت کې حل کړو، (J.He, 2006) (صالحی، بيدار، & نوري، ۱۴۰۴).

د خطي کسري ديفرانسلي معادلو د نيمه تحليلي حل لاسته راوړلو لپاره هوموتوپي اناليز يو اغيزمن مېتود نيمه تحليلي مېتود دی. پدې مېتود کې د h کنترولونکې پارامتر په دقيق ټاکلو سره په آساني سره کولای شو نوموړي معادلې په داسې ډول حل کړو چې دقت يې زيات او خطا يې کمه وي (J.Liao S., 2004). د پېچلو خطي کسري ديفرانسلي معادلو په اوليه شرايطو په شتون کې ترټولو مؤثر نيمه تحليلي مېتود هوموتوپي اناليز دي چې په هر ډول شرايطو کې نسبت نورو مېتودونو ته د تطبيق وړ دي، د تقرب د پارامتر، کمکې تابع او انعطاف منونکې خواصو په لرلو سره کولای شي پېچلي معادلې په لنډ وخت کې په ساده ډول حل کړي (Zill & Cullen, 2009). همدارنگه د خطي کسري ديفرانسلي معادلو د حل لپاره د تغير تکرار منونکي مېتود عمده علت هم په معادله کې د غيرې خطي برخې نشتوالی او د ورکړل شويو اوليه شرايطو سره په ښه ډول مطابقت دی (wu & He, 2007). پس پر دې اساس د تغير تکرار منونکي مېتود د لاگرانژ ضريب په مناسب ټاکلو سره مرحله په مرحله په سرعت سره دقيق حل ته نږدې (تقرب) کېږي. خو د

مروړي

آزاده لاسرسی

پیچلو خطي کسري ديفرانسيلي معادلو لپاره د مناسب لاگرانژ ضریب پیدا کول ستونزمن دي، زیات وخت او اضافي عملیو ته اړتیا پیدا کيږي تر څو د لاگرانژ ضریب لپاره مناسب قیمت پیدا کړو چې دا کړنه د نوموړي میتود نیمگړتیا ښيي (Tomar, 2023).

پایلي

په دې مقاله کې د خطي کسري ديفرانسيلي معادلو د نوعیت، اولیه شرایطو او د خطاء کموالي معیار په پام کې نیولو سره دوه نیمه تحلیلي میتودونه (هوموتوپي انالیز میتود او تغیر تکرار منونکی) پرتله شوي دي. د یادو نیمه تحلیلي میتودونو د ځانگړنو، نیمگړتیاوو او خطاء کموالي په پام کې نیولو سره د بېلابېلو کسري ديفرانسيلي معادلو لپاره په مختلفو شرایطو کې د حل لپاره میتودونه مشخص شوي دي. که چېرې د معادلې نوعیت ته په کتلو او اولیه شرایطو په پام کې نیولو سره د حل لپاره مناسب میتود انتخاب شي، د لاسته راغلي حل دقت به زیات او خطاء به یې کمه وي او همدارنګه د بې ځایه عملیو د تر سر کولو او وخت د ضایع کېدو څخه به مخنیوی شوی وي. د خطي کسري ديفرانسيلي معادلو د حل لپاره هوموتوپي انالیز او تغیر تکرار منونکی دواړه اغېزمن میتودونه دي. د هوموتوپي انالیز میتود اغېزمنتیا دا ده، چې د h کنټرولونکي پارامتر په دقیق ټاکلو سره د نوموړو معادلو لپاره داسې حل لاسته راځي چې دقت یې زیات او خطاء یې کمه وي. پداسې حال کې چې تغیر تکرار منونکی میتود د کسري ديفرانسيلي معادلو د حل لپاره د لاگرانژ ضریب معرفي کوي، چې د هغه د دقیق قیمت په ټاکلو سره د تکراري رابطې په مرسته په آسانی سره اصلي حل ته تقرب کوي، خو ددې ضریب دقیق ټاکل زیات وخت او اضافي عملیو ته اړتیا لري تر څو نسبتاً دقیق قیمت یې پیدا شي.

د یادوني وړ ده هغه پیچلي خطي کسري ديفرانسيلي معادلې چې د هغه په مرسته مهم مسائل موډل شوي وي دحل د دقت او خطا د کموالي په موخه یې د هوموتوپي انالیز میتود اغېزمنتیا نسبت تغیر تکرار منونکي میتود ته زیاته ده ممکن عمليي یې اوږدي وي خو د لاسته راغلي تقریبي حل دقت زیات دي.



حسینی، ا. (۱۳۹۳). حل معادلات دیفرانسیل جبري کسري با میتود های نیمه تحلیلي. ایران. صالحی، م.، بیدار، ع.، & نوری، ن. (۱۴۰۴). د کسري دیفرانسیلي معادلو د حل لپاره د تغیر تکرار منونکي او آومین تجزیوي نیمه تحلیلي میتودونو پرتله. د کابل پوهنتون د طبیعي علومو علمي- څېړنیزه مجله، ۸۹-۱۱۵

Artical, O. E. (2025). *Homotopy Analysis method*. Wikipedia.

Belghaba, A. B. (2022). Shehu Variational Iteration Method For Solve Some Fractional Differential Equations. *Communications in Mathematics and Applications*, 13(3), 1207-1219.

H.Shang, S. J. (2010). Recent advances in the homotopy analysis method. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1012-1033.

He, J. (1999). variational iteration method-a kind of nonlinear analytical technique. *international journal of non linear mechanics*, 34(4), 699-708.

J.He. (2006). Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method. *Applied Mathematics and Computation*, 178(2), 527-539.

J.Liao, S. (2004). Homotopy analysis method and its applications in engineering mechanics. *Applied Mechanics*, 57(2), 67-77.

J.Liao, S. X. (2007). Convergence control criterion of the homotopy analysis method. *Applied Mathematics and Computation*, 1093-1108.

Lavoie, J. L., Osler, T. J., & Tremblay, R. (1976). Fractional Derivatives and Special Function. *SLAM Review*, 240-268.

Liao, S. (2003). *Beuond perturbation introduction to the Homotopy analysis method*. CRC Press.

Liao, S. J. (2012). Homotopy analysis method in nonlinear differential equations. Springer.



آزاده لاسرسی

مروري

Mohammed, H. M. (2016). *Application of Homotopy Analysis Method for Solving Linear and Nonlinear Differential Equations with Fractional Orders*. Zarqa – Jordan .

Odibata, Z., Momanib, S., & Xu, H. (2010). A reliable algorithm of homotopy analysis method for solving nonlinear fractional differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 34, 593–600.

S. J.Liao, S. X. (2007). Convergence control criterion of the homotopy analysis method. *plied Mathematics and Computation*, 182(2), 1093-1108.

Sachin, K., Devi*, K. S., & Kumbinarasaiah, S. (2024). A semi-analytic and numerical approach. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 1069-1105.

Shah, N. H., & Naik, M. K. (2022). *INTEGRAL TRASFORM AND APPLICATION*. Berlin: Walter de Gruyter GmbH.

Tomar, M. S. (2023). Simplifying the variational iteration method: A new approach to obtain the Lagrange multiplier. *Mathematics and Computers in Simulation*, 640–644.

Turkyilmazoglu, M. (2018). Convergence of the homotopy analysis method.

wu, J., & He, A. (2007). Variational iteration method: New development and applications. *Computers & Mathematics with Applications* , 881–894.

X. H.Shang, S. J. (2010). Recent advances in the homotopy analysis method. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(5), 1012-1033.

Zill, D. G., & Cullen, M. (2009). *Differential Equations with boundary value problems*. USA: Library of Congress .