



د خطي کسري ديفرانسيلي معادلو دحل لپاره د لاپلاس تبديل، شيهو تبديل او توان لرونکي سلسلې مېتودونو تطبيق او پرتله

پوهنيار نورالرحمن هاشمي^۱، پوهنيار محمد اسلم صالحی^۱، پوهنيار حفيظ الله اميني^۱

رياضي څانگه، ښوونې او روزنې پوهنځی، وردگ پوهنتون، کابل، افغانستان

*د مسئول ليکوال برېښنالیک: noorrahmanhashemi2025@gmail.com. د اړیکې شمېره: +۹۳۷۴۸۸۸۳۲۹۹

لنډيز

کسري مرتبه ديفرانسيلي معادلې د معمولي ديفرانسيلي معادلو عمومي بڼه ده. د دې مفکورې بنسټ د لومړي ځل لپاره په ۱۶۹۵ ميلادي کال د کسري کالکولس سره سم رامنځ ته شو، چې د رياضي، فزيک او انجنيرۍ په ډيرو مسائلو کې د ستونزو د ماډل کولو لپاره له مهمو وسايلو څخه شمېرل کېږي. د دې معادلو د حل لپاره بېلابېل مېتودونه کارول کېږي، چې د لاپلاس، شيهو او توان لرونکي سلسلې مېتودونه د نوموړو معادلو دحل لپاره بنسټيز رول لري. د دې څېړنې موخه د يادو دريو مېتودونو لاپلاس، شيهو، او توان لرونکي سلسلې مېتودونو د تطبيق او مقايسې له لارې د ثابتو او متحولو ضريب لرونکو کاپوتو نوعه خطي کسري ديفرانسيلي معادلو تحليلي حلونه موندل دي. پايلې څرگندوي چې د لاپلاس او شيهو تبديلوونه د ثابتو ضريبونو لرونکو کسري معادلو په حل کې دقيق او اغېزمن دي، پداسې حال کې چې د لاپلاس تبديل مېتود تطبيق نسبت شيهو تبديل مېتود ته آسانه، خو د توان لرونکو سلسلو مېتود د متحول ضريبونو لرونکو کسري معادلو په حل کې هم غوره پايلې ورکوي. څېړنه ښيي چې مناسب مېتود انتخاب د معادلې په نوعيت پورې تړاو لري.

د مقالې تاريخچه:

د مقالې ترلاسه کولو نېټه:

۱۴۰۵/۱۹ حمل

د مقالې منلو نېټه: ۲۰/نور/۱۴۰۵

د مقالې خپرولو نېټه: ۱۴/اسد/۱۴۰۵

ددې مقالې استناد:

هاشمي، نورالرحمن او همکاران (۱۴۰۵). د خطي کسري ديفرانسيلي معادلو دحل لپاره د لاپلاس تبديل، شيهو تبديل او توان لرونکي سلسلې مېتودونو تطبيق او پرتله. وردگ علمي څېړنيزه مجله ۵ (۱): ۵۰-۶۹

دغه ژورنال د وردگ پوهنتون په چوکاټ کې د لوړو زدکړو وزارت د رسمي جواز پر اساس فعاليت کوي.



وردگ پوهنتون علمي څېړنيز نشرات (۱۴۰۵).

زمونږ سره اړیکې: ۹۳۷۴۵۶۰ ۳۳۱۷+

ايميل: rjd@wu.edu.af

آدرس: سيدآباد ولسوالۍ، ټوپ دښته ميدان وردگ ولايت- افغانستان

کلیدي کلمې: تبديل، توان لرونکي سلسلې مېتود، خطي کسري

ديفرانسيلي معادله، شيهو مېتود، لاپلاس مېتود.



Application and Comparison of the Laplace Transform, Shehu Transform, and Power Series Methods for Solving Linear Fractional Differential Equations

Noor Rahman Hashemi^{*1}, Mohammad Aslam Salehi¹, Hafiz Ullah Amini¹. 1. Mathematics Department, Education Faculty, Wardak University, Kabul, Afghanistan.

^{*}Corresponding author Email: noorrahmanhashemi2025@gmail.com , [Tel:+93748883299](tel:+93748883299)

Abstract

Article History:

Received: 10.Apr.2026

Accepted: 09May.2026

Online First: 05 Aug.2026

Citation:

Hashemi, N. R., et al. (2026). Application and Comparison of the Laplace Transform, Shehu Transform, and Power Series Methods for Solving Linear Fractional Differential Equations. Articles to WNNS. *Wardek J. of Soc Sci* 2026; 5 (1): 50-69

Email: rjd@wu.edu.af

This is an open access article under the Higher Education license



Copyright:© 2026

Published by Wardak University.

Fractional-order differential equations are a generalization of ordinary differential equations. The foundations of this concept were first established in 1695 with the emergence of fractional calculus, and it has since become one of the important tools for modeling problems in mathematics, physics, and engineering. Various methods are employed to solve such equations, among which the Laplace transform, Shehu transform, and power series method play a fundamental role. The objective of this study is to obtain analytical solutions of Caputo-type linear fractional differential equations with constant and variable coefficients through the application and comparison of the Laplace transform, Shehu transform, and power series method. The results indicate that the Laplace and Shehu transforms are accurate and efficient for solving fractional equations with constant coefficients. Although the application of the Laplace transform is relatively simpler than that of the Shehu transform, the power series method yields superior results for fractional differential equations with variable coefficients. The study demonstrates that the selection of an appropriate method depends on the nature of the given equation.

Keywords: Transform, Power series method, Linear fractional differential equation, Shehu method, Laplace method.

سريزه

کسري مرتبه ديفرانسيالي معادلې (Fractional Differential Equations) د عادي ديفرانسيالي معادلو عمومي بڼه ده، چيرې چې مشتقونه پکې د کسري (Fractional) مرتبو سره تعريف شوي دي. د دې مفکورې بنسټ د لومړي ځل لپاره په ۱۶۹۵ ميلادي کال د کسري کالکولس سم رامنځ ته شو (Podlubny, 1999). د دې معادلو د حل لپاره بېلابېل مېتودونه کارول کېږي، چې تر ټولو مشهور يې تحليلي حلونه (Analytical Solutions)، عددې حلونه (Numerical Solutions)، او نيمه تحليلي حلونه (Semi-Analytical Solutions) دي، دا معادلې د فزيک، انجنيرۍ، اقتصاد او نورو برخو کې د پېچلو سيستمونو د ماډل کولو لپاره پراخه کارېدونکي دي (Kilbas et al, 2006).

د ديفرانسيالي معادلو د تحليلي حل لپاره، انتگرالي تبديلونه يو له مؤثرو مېتودونو څخه دي، چې تابع له يوې ساحې (x يا t) څخه بلې ساحې (w يا S) ته انتقالوي، د لاپلاس تبديل چې په ۱۷۸۵ ميلادي کال کې د پير-سيمون لاپلاس (Pierre Simon Laplace) لخوا معرفي شو دا تبديل يو له هغو مهمو تحليلي مېتودونو څخه دي، چې د تطبيقي رياضياتو، فزيک او انجنيرۍ په بېلابېلو برخو کې کارول کېږي، د لاپلاس تبديل ديفرانسيالي معادلې الجبري معادلو ته بدلوي، چې د حل پروسه ساده کوي (Kazem, 2013).

شپهو مايتاما شپهو او همکارانو (۲۰۱۹) يو نوی انتگرالي تبديل معرفي کړ، چې شپهو تبديل نومېږي. دا تبديل د لاپلاس او Sumudu بدلونونو عمومي بڼه ده (Khalouta & Kadem, 2019). د توان لرونکې سلسلې مېتود تاريخي بنسټونه د ۱۸مې پېړۍ له رياضي پوهانو سره تړلي، چيرې چې اوپلر او لاگرانژ ديفرانسيالي معادلو حل ته د سلسلې پر بنسټ کتنه وکړه. وروسته کوشي د تابعگانو د تحليل لپاره دقيق مفاهيم تعريف کړل او توان لرونکې سلسلې يې د عادي ديفرانسيالي معادلو د حل يوه رسمي او سيستماتيک طريقه وگرځوله (DiPrima & Boyce, 2009).

دا چې د لاپلاس، شپهو او توان لرونکې سلسلې مېتودونو تطبيق، تحليل او مقايسه د ثابتو او متحولو ضريب لرونکو کسري ديفرانسيالي معادلو لپاره د مناسب مېتود انتخاب په علمي ډول نه دي تحليلي شوي. چې دا په علمي ساحه کې يوه تشه گڼل کېږي.

له بلې خوا دا چې د خطي کسري مرتبه ديفرانسيالي معادلو هر يو لاپلاس، شپهو او توان لرونکې سلسلې د حل مېتودونه چې لږې څېړنې پرې شوې دي د مقاييسوي تحليل اړتيا شته، چې د کوم

مروړي

آزاده لاسرسي

ډول معادلو لپاره کوم مېتود مناسب، گټور، او تطبيق يې آسانه په علمي توگه نه دي ارزول شوي. له همدې امله دا څېړنه د پورته دلايلو له مخې اړينه او ارزښتناکه ده.

څېړنې موخه

لاپلاس، شېهو او توان لرونکې سلسلې مېتودونه چې په ثابتو او متحولو ضريب لرونکو کاپوتو نوه خطي کسري ديفرانسيل معادلو باندې د تطبيق او مقاييسې څخه د مناسب او اغيزمن مېتود انتخابول دي.

څېړنې پوښتنې

د لاپلاس تبديل مېتود د کوم ډول خطي کسري ديفرانسيل معادلو د لپاره اغيزمن دي؟
د شېهو تبديل مېتودونه د کوم خطي کسري ديفرانسيل معادلو د حل لپاره مناسب دي؟
د توان لرونکې سلسلې مېتود د کوم ډول خطي کسري معادلو لپاره اغيزمن دي؟

تيرو اثارو ته کتنه

انتېگرالي تبديلوونه (Integral Transforms) هغه رياضيکي تخنيکونه دي چې تابع له يوې ساحې (t يا x) بلې ساحې (S يا W) ته انتقالوي، ترڅو پېچلي مسايل او معادلې ساده شي. د دغو تبديلو تاريخچه د رياضياتو له سترو پرمختگونو سره تړلي ده. ځينې مهم انتگرالي تبديلوونه لکه د فوريه تبديل (Fourier Transform) چې بنسټ گريز جوزف فوريه (Joseph Fourier) د تودوخې د انتقال د معادلې په حلولو کې يې ورڅخه استفاده وکړه، لاپلاس تبديل چې بنسټ گريز پير سايمون لاپلاس (Pierre-Simon Laplace) چې د عادي ديفرانسيل معادلو حل او د احتمال نظريې په پراختيا څخه استفاده کړي، زي-تبديل (Z-Transform) چې په ډيجيټل سيستمونو، سيگنال پروسس او کنټرول تيوري ورڅخه استفاده کړي او همدارنگه د هينگل تبديل (Hankel Transform) چې هم محوري سيستمونو ورڅخه استفاده وشوه (Shah & Naik, 2023; Maitama & Zhao, 2019).

لاپلاس تبديل د پير-سيمون لاپلاس (Pierre Simon Laplace) لخوا په ۱۷۸۵ ميلادي کال کې معرفي شوي دي دا تبديل يو له هغو مهمو تحليلي مېتودونو څخه دي، د دې تبديل له تطبيق څخه وروسته ديفرانسيل معادله د الجبري معادلې بڼه اخلي او بيا يې د معکوس لاپلاس تبديل له لارې تر لاسه کړي او ښې چې لاپلاس تبديل د کسري ديفرانسيل معادلو د دقيقو تحليلي

مروړي

آزاده لاسرسۍ

حلونو لپاره يو غوره مېتود دي، او کولای شې د راتلونکو څېړنو لپاره د لا پراخو مطالعاتو زمینه برابره کړي (Kazem, 2013).

د لاپلاس تبدیل د خطي کسري ديفرانسيالي معادلو دحل لپاره يو له خورا پېژندل شويو مېتودونو څخه دی، ځکه چې دا د ابتدايي شرايطو په اداره کولو کې پياوړی دی. په خطي کسري ديفرانسيالي معادلو کې د لاپلاس تبدیل کارول په پراخه کچه تحليل شوي دي، چې دا يې وښودله چې څنگه تبدیل کولی شي پېچلي کسري ديفرانسيالي معادلې الجبري بڼې ته راکمې کړي. (Fahad, Rehman, & Fernandez, 2020).

د لاپلاس تبدیل مېتود د خطي کسري ديفرانسيالي معادلو د حل لپاره يوه مهمه تحليلي وسيله گڼل کيږي، د دې مېتود لومړنې بنسټيزه څېړنه چې پکې يې د لاپلاس تبدیل پواسطه د خطي کسري ديفرانسيالي معادلو تحليلي حلونه مطالعه کړل. نوموړي د کسري ترتيب ابتدايي ارزښت مسئلې د لاپلاس تبدیل له لارې حل کړي (Podlubny, 1999).

د لاپلاس د تبدیل د مېتود پواسطه يې د کسري عادي ديفرانسيالي معادلو د دقيقو تحليلي حلونو لاسته راوړلو لپاره خپلي څېړنې خپرې کړي، چې د مختلفو کسري ترتيب ماډلونو لپاره يې دقيق حلونه وړاندې کړل (Ali et al, 2017).

په دې څېړنه کې يو تعديل شوی لاپلاس تبدیل معرفي شوی، چې $La(f(t))$ په نوم يادېږي او دا د کلاسيک لاپلاس تبدیل يوه عمومي بڼه ده، چې پکې يو a پارامتر شامل شوی دی ليکوالان د دې تعديل شوي تبدیل بنسټيز خاصيتونه لکه خطي خاصيت، شفټينگ تيورمونه، او کانولوشن (تداخل) قواعد ثابت کړي دي. بيلابيلو مثالونو له لارې يې دا تبدیل د نمايې، مثلي او ځانگړو تابع گانو لکه بسيل او لاگرانژ لپاره کارولی دی. دا تبدیل مېتود د رياضي، فزيک، او انجنيرۍ د هغو ستونزو د حل لپاره چې کلاسيک مېتودونه پکې محدود دي، يو مؤثر بدیل وړاندې کوي (Saif, Khan, Nisar, & Araci, 2020).

دا څېړنه د لاپلاس او تجزيوي مېتودونه يو ځای کاروي، تر څو د غير خطي کسري مرتبه ديفرانسيالي معادلو تحليلي حل تر لاسه کړي (Mohamed, Kadri, & Khalil, 2023). دا څېړنه د لاپلاس تبدیل مېتود د کسري ترتيب ديفرانسيالي معادلو د ابتدايي ارزښت مسائلو د حل لپاره کاروی (Jadhav, Salunkhe, & Patel, 2024).

مروړي

آزاده لاسرسۍ

د لاپلاس تبديل مېتود د ځينو عادي كسري ديفرانسيالي معادلو د دقيقو حلونو د پيدا كولو لپاره تطبيق شوي دي (Ali et al, 2017).

شيهو مايتاما شيهو او همكارانو (۲۰۱۹) يو نوي انتگرالي تبديل معرفي كړ، چې شيهو تبديل نومېږي. دا تبديل د عادي او قسمي ديفرانسيالي معادلو د حل لپاره كارول كېږي (Khalouta & Kadem, 2019).

د شيهو تبديل يو نوي انتگرالي تبديل دي، چې د لاپلاس او Sumudu انتگرالي تبديلونو عمومي بڼه گڼل كېږي چې د ثابت او متحول ضريب لرونكو عادي، قسمي او كسري ديفرانسيالي معادلو په تحليلي حل كې ور څخه استفاده كېږي (Maitama & Zhao, 2019). شيهو تبديل چې په وروستيو كې معرفي شوی، داڅېړنه بنسټ چې د شيهو تبديل مېتود د خطي كسري ديفرانسيالي معادلو د لپاره يو نوي او غوره مېتود دي، چې د كسري مشتق د تعريف په اساس د ابتدايي ارزښت مسئلې ساده الجبري معادلو ته تبديل وړ كوي. د دې تبديل معكوس په مرسته د مسئلو تحليلي حلونه په آساني تر لاسه كېږي، چې په دې برخه كې يې ځينې علمي مثالونه هم وړاندې كړي دي (Bribesh, 2023).

د شيهو مېتود دا ځانگړنه لري چې هم متجانسې او هم غير متجانسې خطي كسري ديفرانسيالي معادلې حل كړي او كسري مشتقونه د ريمان-ليويل او كپوتو تعريفونو له امله بيان شوي دي دا تبديل خطي كسري متجانسې او غير متجانسې ديفرانسيالي معادلې د ابتدايي قيمتونو مسئلې (IVPs) الجبري معادلو ته تبديل لوي چې حل يې آسان وي (Khalouta & Kadem, 2019).

د توان لرونكې سلسلې مېتود (Power Series Method) تاريخي بنسټونه د ۱۸مې پېړۍ له رياضي پوهانو سره تړلي، چيرې چې اوپلراو لاگرانژ د ديفرانسيالي معادلو حل ته د سلسلې پر بنسټ كتنه وكړه. وروسته كوشي د تابع گانو د تحليل لپاره دقيق مفاهيم تعريف كړل، او توان لرونكې سلسله يې د ثابت او متحول ضريب لرونكې عادي ديفرانسيالي معادلو د حل لپاره يوه رسمي او سيستماتيک طريقه وگرځوله. (Boyce & DiPrima, 2009; Zill, 2021).

د توان لرونكې سلسلې مېتود د كسري ديفرانسيالي معادلو د تحليلي حل لپاره يوه مؤثره او انعطاف منونكې طريقه ده، چې د دوديزو عددې مېتودونو پر ځای د توان لرونكې سلسلې مېتود كولاى شي دقيق تحليلي حلونه وړاندې كړي (Vatsala & Pageni, 2023).

مروړي

آزاده لاسرسي

څېړنې ته په کتو له کيفي مېتود څخه په استفاده په پيل کې د لاپلاس او شيهو تبديلونو اړين تيوريکي تعريفونه وړاندې کېږي، وروسته د لاپلاس او شيهو تبديلونو ځانگړتياوې او د توان لرونکې سلسلې مېتود تشرېح کېږي، په پای کې د بيلابيلو مثالونو له لارې د دې مېتودونو تطبيق او پايلې وړاندې کېږي.

لاپلاس تبديل

تعريف: د $f(t)$ تابع لپاره د لاپلاس تبديل په $0 \leq t < \infty$ انټروال کې په لاندې ډول تعريفېږي.

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad \text{Re}(s) > 0, \quad (1)$$

$F(s)$ تابع ته د $f(t)$ تابع لاپلاس تابع، L ته لاپلاس اوپراتور او s ته د لاپلاس تابع متحول وايي (Shah & Naik, 2023).

د لاپلاس تبديل ځينې اساسي خاصيتونه

1. خاصيت: د لاپلاس تبديل خطي دي، يعنې که $f_1(t)$ او $f_2(t)$ تابع گانو لپاره د لاپلاس تبديل $F_1(s)$ او $F_2(s)$ وي او c_1 ، c_2 اختياري ثابتونه وي نو.

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)], \quad (2)$$

(Ali et al, 2017).

2. خاصيت: که $L(f(t)) = F(s)$ وي نو

$$L(f(at)) = \frac{1}{s} F(s) \quad (3)$$

(Podlubny, 1999).

3. خاصيت: که $f(t)$ تابع n ځله مشتق منونکې وي نو

$$L[f^{(n)}(x)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (Shah \& Naik, 2023)$$

4. خاصيت: که $L[f(t)] = F(s)$ او $L[g(t)] = G(s)$ لاپلاس تبديلوونه وي نو

$$L[f(t) * g(t)] = F(s)G(s), \quad (5)$$

مروري

آزاده لاسرسي

داسې چې د دوو تابع گانو کانولوشن ضرب په لاندې ډول دي (Ali et al, 2017).

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(v)g(t-v)dv = \int_0^t f(t-v)g(v)dv. \quad t > 0 \quad (6)$$

معكوس لاپلاس تبديل

تعريف: كه $F(s)$ د $f(t)$ تابع لاپلاس تبديل تابع وي، نو معكوس لاپلاس تبديل يې په لاندې تعريفېږي.

$$f(t) = S^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} e^{st} F(s) ds. \quad \alpha > s, \quad (7)$$

چې $f(t)$ ته د $F(s)$ تابع معكوس لاپلاس تبديل تابع وايي (Podlubny, 1999).

1 جدول: د ځينو خاصو تابع گانو لاپلاس تبديل

S. No	تابع	لاپلاس تبديل
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$exp(at)$	$\frac{1}{s-a}$

تعريف: كه يو ه تابع په لاندې ډول تعريف شوي وي،

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}. \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \quad (8)$$

ورته يو متحوله ميتاگ لفلر تابع وايي دا تابع د سويډن مشهور رياضي پوه گوستا ميتاگ-

لفلر (Gosta Mittag-Leffler) له خوا په 1903 ميلادي كال كې معرفي شوه، دا تابع په كسري مشتق او انتيگرال ډير گټور رول لري، دميتاگ- لفلر تابع د نمايي تابع (Exponential Function) تعميم (عمومي بڼه) ده.

مروړي

آزاده لاسرسي

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} \cdot \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0, \quad (9)$$

ته دوه متحولې میتاګ لفلر تابع وایی (Kazem, 2013).

تعریف: د $\mu \geq -1$ ، $f(x) \in C_\mu$ تابع لپاره د ریمان لویول $\alpha > 0$ مرتبه کسري انتیګرال اوپراتور په لاندې ډول تعریفیږي (Kazem, 2013).

$${}_0I_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt & \alpha > 0, t > 0 \\ f(x) & t = 0 \end{cases} \quad (11)$$

تعریف: که $f(t) \in C_\mu^n$ ، $t > 0$ ، $n-1 < \alpha \leq n$ وي، داسې چې n یو طبعي عدد دی نو د $f(t)$ تابع لپاره د کاپوټو کسري ترتیب مشتق په لاندې ډول تعریفیږي. او په $D_C^\alpha f(t)$ یا ${}_0^C D_t^\alpha f(t)$ سره ښودل کیږي (Kazem, 2013).

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(u) du & n-1 < \alpha < n, \\ \frac{d^n f(t)}{dx^n} & n = \alpha \end{cases}$$

۱ قضیه: که $a \in \mathbb{R}$ ، $\alpha, \beta > 0$ او $|a| < \operatorname{Re}(\alpha)$ وي نو لاندې معکوس لاپلاس تبدیل فورمول حاصلیږي (Kazem, 2013).

$$L^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda} \right] = x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda x^\alpha) \Rightarrow L[x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda x^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}$$

۲ قضیه: د ریمان-لیوویل د کسري مرتبه انتیګرال اپراتور $\alpha > 0$ لاپلاس تبدیل په لاندې ډول دي

$$L[{}_0I_x^\alpha] = \frac{F(s)}{s^\alpha}, \quad (14)$$

۳ قضیه: د کپوټو د کسري مرتبې مشتق اپراتور $\alpha > 0$ لپاره لاپلاس تبدیل په لاندې ډول دي (Katoch & Ali, 2022).

$$L[{}_0^C D_x^\alpha f(x)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (18)$$

شيهو تبديل

تعريف: د $v(t)$ نمايي مرتبې تابع شيهو تبديل د تابع گانو په يوه ټاکلي سيټ A باندې که

$$A = \left\{ v(t) : \exists N, \eta_1, \eta_2 > 0, |v(t)| < N \exp\left(\frac{|t|}{\eta_i}\right), \text{ if } t \in (-1)^i \times [0, \infty) \right\} \quad (19)$$

وي نو د $v(t)$ تابع شيهو تبديل د لاندې انتگرال پواسطه تعريفېږي.

$$\mathbb{S}[v(t)] = V(s, u) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{st}{u}\right) v(t) dt, \quad t > 0$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha \exp\left(-\frac{st}{u}\right) v(t) dt, \quad s > 0 \quad u > 0,$$

چې $V(s, u)$ ته د $v(t)$ تابع شيهو تبديل تابع او $\mathbb{S}$ ته د شيهو تبديل اوپراتورويي (Khalouta & Kadem, 2019).

د شيهو تبديل ځيني اساسي خاصيتونه

۱. خاصيت: د شيهو تبديل خطي دي، يعنې که $v_1(t)$ او $v_2(t)$ تابع گانو لپاره شيهو تبديل $V_1(s, u)$ او $V_2(s, u)$ وي او c_1, c_2 اختياري ثابتونه وي نو.

$$\begin{aligned} & \mathbb{S}[c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t)] \\ &= c_1 \mathbb{S}[v_1(t)] + c_2 \mathbb{S}[v_2(t)], \end{aligned} \quad (20)$$

۲. خاصيت: که $\mathbb{S}[v(t)] = V(s, u)$ وي نو

$$\mathbb{S}[v(\beta t)] = \frac{1}{\beta} V\left(\frac{s}{\beta}, u\right), \quad (21)$$

۳. خاصيت: که $v(t)$ تابع n -ځله مشتق منونکې تابع نظر t متحول ته وي نو

$$\begin{aligned} & \mathbb{S}[v^{(n)}(t)] = \left(\frac{s}{u}\right)^n V(s, u) \\ & - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{n-k-1} v^{(k)}(0), \end{aligned} \quad (22)$$

مروري

آزاده لاسرسۍ

4. خاصيت: که $v(t), w(t) \in A$ دوه تابع گانې داسې چې شيهو تبديل په ترتيب سره $V(s, u)$ او $W(s, u)$ وي نو د $v(t)$ او $w(t)$ کانولوشن $((v * w)(t))$ شيهو تبديل په لاندې ډول دي (Belgacem & Bokhari, 2019).

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[(v * w)(t)] &= V(s, u)W(s, u) \cdot (v * w)(t) \\ &= \int_0^t v(\tau)w(t - \tau)d\tau, \end{aligned}$$

معکوس شيهو تبديل

تعريف: که $V(s, u)$ د $v(t)$ تابع شيهو تبديل تابع وي، نو معکوس شيهو تبديل يې په لاندې تعريفېږي (Maitama & Zhao, 2019).

$$v(t) = \mathbb{S}^{-1}[V(s, u)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{1}{u} \exp\left(\frac{st}{u}\right) V(s, t) ds, \quad (23)$$

2 جدول: د ځينو خاصو تابع گانو شيهو تبديل

S. N	تابع	شيهو تبديل
1	1	$\frac{u}{s}$
2	t	$\frac{u^2}{s^2}$
3	t^n	$\left(\frac{u}{s}\right)^{n+1}, n = 1, 2, 3, \dots$
4	$\exp(at)$	$\frac{u}{s - au}$

4 قضيه: که $|a| < \frac{s^\alpha}{u^\alpha}$ وي نو معکوس شيهو تبديل يې په لاندې ډول دي (Bribesh, 2023).

$$\mathbb{S}^{-1}\left[\frac{u^\alpha s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \alpha u^\alpha}\right] = t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(-at^\alpha), \quad (24)$$

مروړي

آزاده لاسرسي

۵۵ قضيه: د ريمان - ليوويل کسري مرتبه انتگرال شيهو تبديل په لاندې ډول دي

$$S[{}_0I_x^\alpha f(t)] = \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha V(s.u), \quad (25)$$

۶۶ قضيه: د کاپوتو د کسري مشتق لپاره شيهو تبديل په لاندې ډول دي (Khalouta &

Kadem, 2019).

$$S[{}_0D_x^\alpha v(x)] = \left(\frac{s}{u}\right)^\alpha V(s.u) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{\alpha-k-1} v^{(k)}(0), \quad (26)$$

موندنې

د لاپلاس تبديل مېتود تطبيق

مثال: لاندې ثابت ضريب لرونکې متجانسه کسري ديفرانسيالي معادله په پام کې نيسو.

$$D_C^\alpha y(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 2 \quad (27)$$

حل: د پورته معادلې له دواړو خواوو څخه لاپلاس تبديل اخلو.

$$\mathcal{L}[D_C^\alpha y(x) + y(x)] = \mathcal{L}[0] \quad (28)$$

$$\frac{sF(s) - y(0)}{s^{1-\alpha}} + F(s) = 0, \quad (29)$$

(29) معادله $F(s)$ ته حلو.

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1} + 1}{1 + s^\alpha}, \quad (30)$$

د (30) رابطې له دواړو خواوو څخه معکوس لاپلاس تبديل اخلو.

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1} + 1}{1 + s^\alpha}\right] \quad (31)$$

د 1 قضیې څخه په استفاده سره د (31) معادلې حل لاسته راځي.

$$y(x) = E_\alpha(-x^\alpha),$$

مثال: لاندې متحول ضريب لرونکې کسري ديفرانسيالي معادله د لاپلاس تبديل مېتود په

وسيله حل کړئ:

$$D_C^{\frac{1}{2}} y(t) + ty(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad (32)$$

حل: له دواړو خواوو لاپلاس تبديل په اخستلو سره لرو

مروړي

آزاده لاسرسي

$$\mathcal{L} \left[D_C^{\frac{1}{2}} y(t) + ty(t) \right] = 0 \Rightarrow s^{\frac{1}{2}} Y(s) - s^{-\frac{1}{2}} y_0 - \frac{d}{ds} Y(s) = 0$$

$$\frac{dY}{ds} - s^{\frac{1}{2}} Y(s) = s^{-\frac{1}{2}} y_0 \quad (33)$$

پورته يوه لومړي ترتيب عادي خطي ديفرانسيالي معادله ده چې حل يې د انتگرال فکتور څخه په استفاده سره لاندې شکل لري.

$$Y(s) = -y_0 e^{\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}} \int s^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}} ds + C e^{\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}} \quad (34)$$

له (34) رابطي څخه معکوس لاپلاس تبديل تابع پيدا کول ساده نه ده.

د شيهو تبديل مېتود تطبيق

مثال: لاندې ثابت ضريب لرونکي کسري ديفرانسيالي معادله د شيهو تبديل مېتود څخه په

استفاده سره حل کړئ

$$D_C^\alpha f(t) + f(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (35)$$

حل: د پورته معادلې له دواړو خواوو شيهو تبديل اخلو. نو لرو چې

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[D_C^\alpha y(t) + y(t)] &= \mathbb{S}[0] \\ \frac{s^\alpha}{u^\alpha} F(s, u) - \left(\frac{s}{u}\right)^{\alpha-1} + F(s, u) &= 0 \\ F(s, u) &= \frac{us^{\alpha-1}}{s^\alpha + u^\alpha} \end{aligned} \quad (36)$$

د (36) معادلې له دواړو خواوو د معکوس شيهو تبديل له اخستلو حل لاسته راځي

$$\mathbb{S}^{-1}[Y(s, u)] = \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{us^{\alpha-1}}{s^\alpha + u^\alpha} \right] \Rightarrow y(t) = E_\alpha(t^\alpha),$$

په همدې ترتيب که په

$$D_C^{\frac{1}{2}} y(t) + ty(t) = 0, \quad y(0) = y_0,$$

متحول ضريب لرونکي کسري ديفرانسيالي معادله باندې د شيهو تبديل مېتود تطبيق کړو د

لاپلاس تبديل مېتود په شان يې د معکوس شيهو تبديل تابع پيدا کول آسانه کار نه دي.

د توان لرونکي سلسلې مېتود تطبيق

مروړي

آزاده لاسرسۍ

مثال: په ثابتو ضريبونو لاندې کسري مرتبه ديفرانسيالي معادله په نظر کې نيسو او حل يې دتوان لرونکې سلسلې مېتود څخه په استفاده لاسته راوړو.

$$D_c^q y(t) - \lambda y(t) = 0, \quad 0 < q < 1, \quad y(0) = C_0, \quad (37)$$

حل: د پورته معادلې حل د لاندې توان لرونکې سلسلې په شکل لټوو او نامعلوم ضريبونه پيدا کوو.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{nq}, \quad (37)$$

دافرض شوي حل په (37) معادله کې سره له مشتقاتو وضع کوو.يعنې

$$\begin{aligned} D_c^q \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{nq} \right] - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{nq} \\ = 0 \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} [D_c^q x^{nq}] - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{nq} = 0 \end{aligned}$$

د کاپوتو مشتق څخه په استفاده سره لرو، چې.

$$D_c^\alpha t^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} t^{n-\alpha},$$

نوليکو چې

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \frac{\Gamma((n+1)q+1)}{\Gamma(nq+1)} t^{nq} - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{nq} = 0,$$

په پورته معادله کې د متحول د مساوي توان لرونکو ضريبونو له مساوي کولو څخه لرو.

$$C_n = C_0 \frac{\lambda^n}{\Gamma(nq+1)}, \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

د C_n قيمت په (36) رابطه کې له وضع کولو څخه لرو.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{\lambda^n}{\Gamma(nq+1)} t^{nq}$$

د دوه متحول مېتاگ لفلر تابع له تعريف څخه حل لاسته راځي.

$$y(t) = C_0 E_{q,1}(\lambda t^q),$$

مثال: لاندې متحول ضريب لرونکي کسري ديفرانسيالي معادله په نظر کې نيسو او حل يې د توان لرونکې سلسلې مېتود پواسطه محاسبه کوو.

$$D_C^q u(t) = \lambda t^q u(t), \quad 0 < q < 1 \quad u(0) = u_0 \quad (38)$$

حل: د پورته معادلې حل د لاندې توان لرونکې سلسلې په شکل لټوو او نامعلوم ضريبونه پيدا کوو.

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^{kq} \quad (39)$$

(39) رابطه په (37) رابطه کې سره له مشتقاتو وضع کوو. يعنې

$$D_C^q \left[\sum_{k=0}^{\infty} u_k t^{kq} \right] = t^q \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^{kq} \quad (40)$$

نظر د توان لرونکې تابع کاپوتو مشتق ته ليکلای شو.

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{k+1} t^{kq} \frac{\Gamma((k+1)q+1)}{\Gamma(kq+1)} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^{kq} = 0 \quad (41)$$

د متحول د مساوي توانونو د ضريبونو له مساوي کولو څخه لرو.

$$u_1 \Gamma((q+1)) = 0 \Rightarrow u_1 = 0,$$

همدارنگه

$$u_2 \frac{\Gamma(2q+1)}{\Gamma(q+1)} = \lambda u_0 \Rightarrow u_2 = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(2q+1)} \lambda u_0, \quad u_3 = 0,$$

په ورته ډول

$$u_4 = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(2q+1)} \lambda u_2 = \lambda^2 u_0 \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(3q+1)}{\Gamma(2q+1)\Gamma(4q+1)},$$

په عمومي ډول

$$u_{2n+1} = 0, \quad n = 0.1.2. \dots$$

$$u_{2n} = \lambda^n u_0 \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(3q+1) \cdots \Gamma((2n-1)q+1)}{\Gamma(2q+1)\Gamma(4q+1) \cdots \Gamma(2nq+1)}, \quad n = 0.1.2. \dots \quad (42)$$

مروړي

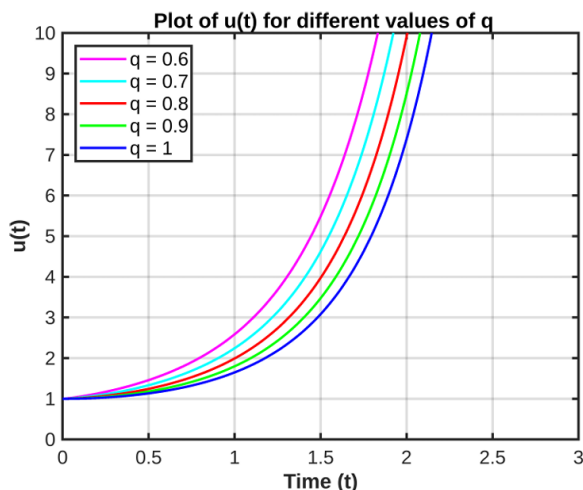
آزاده لاسرسۍ

په (39) رابطه کې د (42) له وضع کولو څخه د (38) معادلې حل لاسته راځي. يعنې

$$u(t) = u_0 \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^n \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(3q+1)\cdots\Gamma((2n-1)q+1)}{\Gamma(2q+1)\Gamma(4q+1)\cdots\Gamma(2nq+1)} t^{2kq} \right).$$

$$u(t) = u_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma((2k-1)q+1)t^{2nq}}{\Gamma(kq+1)} \right],$$

په ۱: شکل کې د $u(t)$ تابع گراف چې د (38) کسري ديفرانسيالي معادلې حل دي، د q د مختلفو قيمتونو لپاره په ځانگړي ډول د $q = 0,6, 0,7, 0,8, 0,9$ او $q = 1$ لپاره ترسيم شوي دي او د دې گراف د رسمولو لپاره له MATLAB پروگرام څخه گټه اخيستل شوې ده.



۱ شکل: د $u(t)$ تابع گراف د q د ځينو قيمتونو لپاره

مناقشه

د تپرو اثارو او موندنو څخه معلومېږي، چې د لاپلاس تبديل مېتود يو کلاسيک مېتود دی چې له ډېرو کلونو راهيسې د معمولي او قسمي ديفرانسيالي معادلو د تحليلي حل د پيدا کولو لپاره کارول کېږي، همدارنگه د لاپلاس تبديل مېتود د خطي کسري ديفرانسيالي معادلو د حل لپاره چې ضريبونه يې ثابت وي هم کارول کېږي، لاپلاس تبديل کسري ديفرانسيالي معادله په الجبري

مروړي**آزاده لاسرسي**

بڼه بدلوي، او د ابتدايي شرايطو په پام کې نيولو سره يې حل ساده او آسانه کوي، خو د متحول ضريب لرونکو کسري ديفرانسيلي معادلو د حل لپاره مناسب نه دي.

شيهو تبديل مېتود چې په وروستيو کلونو کې وړاندې شوې، د لاپلاس تبديل مېتود په څېر د معمولي، قسمي او هم د خطي کسري ديفرانسيلي معادلو لپاره، چې ضريبونه يې ثابت وي کارول کيږي، شيهو تبديل کسري ديفرانسيلي معادله په الجبري بڼه بدلوي، او د ابتدايي شرايطو په پام کې نيولو سره يې حل ساده او آسانه کوي. دا مېتود معمولاً د صفر ابتدايي شرايطو او متجانسو تابعو سره خورا اغيزمن دی، خو د ځينو غير متجانسو او پېچلو ميتاگ-لفلر تابعو لکه لپاره يې تطبيق محدود پېري.

مگر د توان لرونکې سلسلې مېتود د ثابت او متحول ضريب لرونکو عادي او کسري ديفرانسيلي معادلو د حل لپاره غوره او مناسب مېتود دی.

پايله

د څېړنې له نتايجو څخه دا پايله اخېستل کيږي چې لاپلاس او شيهو تبديل مېتودونه يوازې د هغو کسري مرتبه ديفرانسيلي معادلو د حل لپاره غوره او مناسب دي، چې ضريبونه يې ثابت وي. همدرانگه، د شيهو تبديل مېتود تطبيق او معکوس شيهو تبديل پيدا کول نسبت لاپلاس تبديل مېتود ته ستونزمن دي، اما د توان لرونکې سلسلې مېتود نه يوازې د ثابتو ضريبونو، بلکې د متحول ضريب لرونکو کسري مرتبه ديفرانسيلي معادلو د حل هم مناسب او غوره مېتود دي.

وړانديزونه

۱. د څېړنې د تطبيق په برخه کې د لاپلاس او شيهو مېتودونو د متحول ضريب لرونکو معادلو لپاره د محدوديت ستونزه تر ټولو مهمه نيمگړتيا ده. راتلونکو څېړونکو ته وړانديز کيږي چې د دې نيمگړتيا د لرې کولو اړوند نورې څېړنې وشي تر څو اړوند ستونزه حل شي.
۲. د لاپلاس او شيهو تبديل د تطبيق پراخې څېړنې دې وشي، په خاص ډول د هغو معادلو لپاره چې پېچلې ميتاگ لفلر تابع پکې موجودې وي.



- Ali, G. E. H., Asaad, A. A., Elagan, S. K., Mawaheb, E. A., & AlDien, M. S. (2017). Using Laplace transform method for obtaining the exact analytic solutions of some ordinary fractional differential equations. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(9), 5021–5035.
- Belgacem, R., Baleanu, D., & Bokhari, A. (2019). Shehu transform and applications to Caputo-fractional differential equations. *International Journal of Analysis and Applications*, 17(6), 917–927.
- Bribesh, F. A. M. (2023). On Shehu transform with application of solutions of fractional differential equations. *Sebha University Journal of Pure & Applied Sciences*, 22(3).
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary differential equations and boundary value problems* (9th ed.). Wiley.
- Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer.
- Debnath, L., & Bhatta, D. (2015). *Integral transforms and their applications* (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC.
- Diethelm, K., & Ford, N. J. (2002). Numerical solution of the Bagley–Torvik equation. *BIT Numerical Mathematics*, 42(3), 490–507.
- Katoch, N., & Ali, M. F. (2022). Solutions of fractional differential equations using fractional Laplace transform & Shehu transform method. *Design Engineering*, (1), 1031–1041.
- Kazem, S. (2013). Exact solution of some linear fractional differential equations by Laplace transforms. *International Journal of Nonlinear Science*, 16(1), 3–11.
- Khalouta, A., & Kadem, A. (2019). A new method to solve fractional differential



آزاده لاسرسی

مروړي

- equations: Inverse fractional Shehu transform method. Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), 14(2), Article 19.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier.
- Maitama, S., & Zhao, W. (2019). New integral transform: Shehu transform a generalization of Sumudu and Laplace transform for solving differential equations. International Journal of Analysis and Applications
- Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Academic Press.
- Qureshi, S., & Kumar, P. (2019). Using Shehu integral transform to solve fractional order Caputo type initial value problems. Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 18(2), 75–83.
- Shah, N. H., & Naik, M. K. (2023). Integral transforms and applications. De Gruyter.