سپېڅلي، زرغونه. (۱۴۰۵). د وردگ پوهنتون د طبيعي علومو څېړنيز ژورنال، ۵ (۱):۸۹-۱۰۹ WNJS

آزاده لاسرسی

مروري

The application of residues in the calculation of certain real integrals

Associate Professor Zarghoona Spasely *1
General Mathematics Department, Faculty of Mathematics, Kabul University, Kabul Afghanistan.
*Corresponding author Email: spesalyzar@gmail.com , Tel:+93700029529

Article History:
Received: 18. Mar.2026
Accepted: 02. Apr.2026
Online First:21.Aug.2026

Citation:
spasely, zarghoona (2026).
The application of residues in the calculation of certain real integrals. Articles to WNNS. *Wardek J of Nat Sci* 2026;5(1):89-109

Email: rjd@wu.edu.af
This is an open access article under the Higher Education license

Copyright:© 2026
Published by Wardak Universty.

Abstract

The study of residues for calculating certain real integrals is currently a rich area of complex analysis with applications in various fields. The computation of some real integrals using analytical methods is difficult, and samte time not impossible. Most of these types of integrals can be computed using residues; however, the calculation of residues is sometimes complicated. Therefore, it is a nead to study the conditions for applying residue theorems, for solving such integrals. In this article, the properties of analytic functions in a bounded region and their poles are utilized. First, general information about the topic is stated. Then, theorems that help us to solve such problems are stated and proven. Finally, the obtained results are summarized and stated.

Keywords: Real integral, residue, Laurent series, pol

مروري

آزاده لاسرسی

سریزه

الحمد لله رب العالمین و العاقبة للمتقین و الصلاة والسلام علی خیر خلقه محمد و علی آله و أصحابه أجمعین.

مختلط انالیز د ریاضیاتویوه ډېره مهمه برخه د ه چې په ډېرو علومو کې په نظري او تطبیقي ډول لیدل کېږي. دا رشته نه یوازې په ریاضیاتو کې د اهمیت وړ ده، په نورو طبیعی او انجنیری علومو کې هم کارول کېږي. د مختلط انالیز یو له مهمو موضوعاتو څخه د مختلطو توابعو او د هغو د ځانګړتیا مطالعه ده.

په دی برخه کې کلیدي مفهومونه د مختلطو سلسلو نظریه په عمومی ډول او د لورانت سلسلې په ځانګړی ډول دي. د لورانت د سلسلې د اصلي برخې لومړی ضریب چې رېزېډو نومیږی د ډېری مهمی وسیلې په توګه د حقیقي انتیګرالونو په حل کې کارول کېږي. په دې مقاله کې لومړی د کلیدي مفهومونوله جملې څخه د تایلور او لورانت سلسلې معرفي او وروسته د لورانت د سلسلې په مرسته رېزېډو تعریف او د رېزېډو د قضایاوو په مرسته د ځینو حقیقي انتیګرالونو په محاسبه کې د رېزېډو کارونه مرور شوی ده. د موضوعاتو د ښه وضاحت لپاره قضیې بیان، تحلیل او اړونده مثالونه یې حل شوی دي.

لومړني مفاهیم

د تایلور سلسله : هولومورفي توابعي د تایلور سلسلې په شکل ښودل کېږي، که په ټوله مستوي کې هولومورف نه وي، نو د تقارب شعاع په پام کې نیولو سره د تایلور سلسله لیکو:

د z مختلط متحول له تقارب شعاع او طاقت سلسلې ترمنځ رابطي څخه

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = L$ یوه، یو قیمته تابع ده. یعني $f(z) = L$ او یا

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = L$.

که د f یوه تابع د طاقت سلسله په توګه په $|z-z_0| = R$ تقارب دایره کې په پام کې ونیسو، نو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (z - z_0)^k$$
$$= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots$$

د دې سلسلې مشتق کولای شو چې په متوالی ډول ونیسو (Bourchtein &Bourchtein,2021).

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, k(z - z_0)^{k-1} = a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0) + \cdots$$
$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \, k(k-1)(z - z_0)^{k-2} = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3(z - z_0) + \cdots$$
$$f'''(z) = \sum_{k=3}^{\infty} a_k \, k(k-1)(k-2)(z - z_0)^{k-3} = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + \cdots$$

د طاقت یوه سلسله د بې نهایت مشتق منونکو توابعو څخه تشکیل شوې تابع په توګه د تقارب دایره کې ده، په نتیجه کې هغه د تقارب په دایره هولومورف ده. په وروستی روابطو کې د a_k د ضریبونو او د f تابع د مشتقونو تر منځ لاندې روابطې شته:

$$f(z_0) = a_0 \quad , \quad f'(z_0) = 1! \, a_1 \quad , \quad f''(z_0) = 2! \, a_2 \quad , \quad f'''(z_0) = 3! \, a_3$$

په عمومی ډول $f^{(n)}(z_0) = n! \, a_n$ په نتیجه کې

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \; , \; n \geq 0$$

د صفر مرتبې د مشتق په پام کې نیولو سره $a_0 = f(z_0)$ او $0! = 1$ د تایلور سلسله

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

په z_0 کې په لاس راځي.

1.1 قضیه: (د تایلور قضیه)

که f په D ناحیه کې یوه هولومورف تابع او z_0 د D یوه نقطه وي. نو f د سلسلې په توګه

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

د C لويې دايرې د D دننه د R په شعاع او z_0 مرکزيت صدق کوي (Zill &Shanahan, 2003).

ثبوت: فرضوو z د C دايرې دننه يوه معينه نقطه او s د انتيګرال متحول وي. څرنګه چې C د $|s-z_0|=R$ معادلې سره د D دننه دی. د $f(z)$ قيمت د پيدا کولو لپاره د کوشي انتيګرال کاروو.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{s-z}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z_0)-(z-z_0)}\,ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{s-z_0}\left\{\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}\right\}ds$$

پوهېږو چې

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}=1+\frac{z-z_0}{s-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{n-1}+\frac{(z-z_0)^n}{(s-z)(s-z_0)^{n-1}}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{s-z}\,ds+\frac{z-z_0}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z_0)^2}\,ds+\frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z_0)^3}\,ds+\cdots+\frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z_0)^n}\,ds+\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n}\,ds$$

د مشتقونو او کوشي انتيګرال څخه په کار اخيستنې ليکلای شو چې

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1}+R_n$$

وروستی رابطه د تايلور فورمول دی په داسې حال کې چې

$$R_n(z)=\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n}\,ds$$

د تايلور باقي پاتې نومېږي. کولای شو وښيو چې $\lim_{n\to\infty}R_n=0$ ، نو

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

د لورانت سلسله: که د $f(z)$ تابع په z_0 نقطه کې هولوморف نه وی. د تايلور له قضيې څخه کار اخيستي نه شو. مګر اکثراً کولای شو چې يوه سلسله د $f(z)$ لپاره چې د $z-z_0$ د مثبت اومنفی توانونو لرونکي وي پيدا کړو. دا ډول سلسلې د لورانت سلسلې په نوم يادېږی. او په لاندې ډول ښودل کېږي(Marshall, 2019).

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,(z-z_0)^k$$

2.1 قضيه : (د لورانت قضيه)

که f په يوه حلقوي ناحيه D کې چې د $r<|z-z_0|<R$ په واسطه ټاکل کېږي، هولومورف وي. نو f په دې ناحيه کې د لورانت سلسلې په توګه

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,(z-z_0)^k$$

ده. داسې چې د a_k ضريبونه عبارت دي له

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(w)}{(s-z)^{k+1}}\,dw\ ,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

او C د D ساده تړلې منحنی دی چې z_0 يې دننه وي(Zill &Shanahan, 2003) .

ثبوت: د کوشي انتيګرال په پام کې لرلو سره

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw\ -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

د I انتيګرال لپاره:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}$$

$$=\frac{1}{w-z_0}+\frac{z-z_0}{(w-z_0)^2}+\cdots+\frac{(z-z_0)^{n-1}}{(w-z_0)^n}+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{1}{w-z}$$

نو

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z_0}\,dw+\frac{z-z_0}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\,dw+\cdots+\frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^n}\,dw+U_n$$

او

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+U_n$$

په داسې حال کې چې

$$a_0=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z_0}\,dw\quad,\quad a_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\,dw\quad,\cdots,$$

$$a_{n-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^n}\,dw\quad,\quad U_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{w-z_0}\,dw$$

د II انتیگرال لپاره:

$$-\frac{1}{w-z}=\frac{1}{z-w}=\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)}$$

$$=\frac{1}{z-z_0}+\frac{w-z_0}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{1}{z-w}$$

نو

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{z-z_0}\,dw+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{w-z_0}{(z-z_0)^2}\,dw+\cdots+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}f(w)dw+V_n$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+V_n$$

په دې حال کې چې

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}f(w)\,dw\quad,\quad a_{-2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}(w-z_0)f(w)\,dw\quad,\cdots$$

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}(w-z_0)^{n-1}f(w)\,dw\quad,\quad V_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{z-w}\,dw$$

په نتيجه کې

$$f(z)=[a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}]+\left[\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}\right]+U_n+V_n$$

کولای شو وښيو چې $\lim_{n\to\infty}U_n=0$ او $\lim_{n\to\infty}V_n=0$.

دلورانت سلسله په لاندې ډول ښودل کېږي:

$$f(z)=\left[a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots\right]$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\qquad n=0,1,2,3,\cdots$$

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}(z-z_0)^{n-1}f(z)\,dz\qquad n=0,1,2,3,\cdots$$

د لورانت د سلسلې لومړی برخه چې په کې $1-z$ د منفي توانونو لرونکې نه دی، د هولوموروف (صحيح برخې) په نوم او دوهمه برخه چې په کې $1-z$ د منفی توانونو لرونکې دی، د اصلی برخې په نوم يادېږي(Zakeri, 2021; Beck et al.,2018).

مروري

آزاده لاسرسی

ريزېډو

د ريزېډو کلمه د باقي پاتې په معنا ده. په دې مقاله کې د ريزېډو اصطلاح څخه کار اخلو.

ريزېډو : د a_{-1} ضريب له $\frac{1}{(z-z_0)}$ حده د لورانت سلسلې

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$$

څخه د z_0 په منفرده نقطه کې د دې تابع ريزېډو بلل کېږي او په لاندې ډول ارائه کېږي.

$$a_{-1}=Re\,s\,(f(z),z_0)$$

که د لورانت سلسلې اصلي برخه د $0<|z-z_0|<R$ لپاره د منلو وړ وي، او د متناهي شمير a_{-n} ضريب لرونکې حدونه د صفر خلاف وي نو z_0 مرتبه n قطب دی او که د سلسلې اصلي برخه د نا متناهي شمېر لرونکو حدونه د صفر خلاف ضريب وي، نو z_0 منفرده لازمه نقطه ده.

3.1 قضيه: که f په $z=z_0$ کې يوساده قطب ولري، نو

$$Re\,s\,(f(z),z_0)=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$$

.(Priestley, 2006)

ثبوت: څرنګه چې $z=z_0$ د f په يوساده قطب دی، نو د لورانت سلسله يې په $0<|z-z_0|<R$ ناحيه کې متقاربه ده او لاندې بڼه لري.

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots,a_{-1}\neq 0$$

يا

$$(z-z_0)f(z)=a_{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots,a_{-1}\neq 0$$

له دې ځايه لرو

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]=\lim_{z\to z_0}[a_{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots]=a_{-1}=Re\,s\,(f(z),z_0)$$

4.1 قضيه: که $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ داسې چې $p(z_0)\neq 0$ او $q(z)$ يوساده قطب په $z=z_0$ ولري، نو f هم په $z=z_0$ د ساده قطب لرونکې ده او

$$Re\,s\,(f(z),z_0)=\frac{p(z)}{q'(z)}$$

.(Conway, 2002)

ثبوت: د تايلور سلسله د $q(z)$ تابع لپاره په $z=z_0$ کې

$$q(z)=q(z_0)+\frac{q'(z)}{1!}(z-z_0)++\frac{q''(z)}{2!\,(z-z_0)^2}$$

بڼه لري. د مخکني دستور په بنسټ

$$\operatorname{Re}s\left(f(z),z_0\right)=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)p(z)}{q(z)}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)p(z)}{\frac{q'(z)}{1!}(z-z_0)+\frac{q''(z)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{\frac{q'(z)}{1!}+\frac{q''(z)}{2!}(z-z_0)+\frac{q'''(z)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots}$$

$$=\frac{p(z)}{q'(z)}$$

5.1 **قضيه:** که f په $z=z_0$ کې n مرتبه يي قطب ولري، نو

$$Re\,s\,(f(z),z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]$$

.(Ablowitz, 2003)

ثبوت: څرنګه چې f په $z=z_0$ کې د n مرتبه يي قطب لرونکې ده، نود لورانت سلسله يې په $0<|z-z_0|<R$ ناحيه کې متقاربه ده او لاندې بڼه لري

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{z-z_0}+\cdots+$$
$$\frac{a_{-1}}{(z-z_0)^n}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

که د پورتني مساواتو دواړه خواوې په $(z-z_0)^n$ ضرب کړو، نو

$$(z-z_0)^n f(z)=a_{-n}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{n-1}+a_0(z-z_0)^n+$$
$$a_1(z-z_0)^{n+1}+a_2(z-z_0)^{n+2}+\cdots$$

که د پورتنۍ رابطې د دواړو خواوو $n-1$ ام ، مشتقات په لاس راوړل شي، نو

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z) = (n-1)!\, a_{-1} + n!\, a_0(z-z_0) + (n+1)!\, a_1(z-z_0)^2 + \cdots$$

او

$$\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^n}{dz^n}(z-z_0)^n f(z)\right] = (n-1)!\, a_{-1}$$

يعنې

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]$$

په نتيجه کې

$$Re\, s\,(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right]$$

6.1 قضيه: (د رېزېدو دکوشي قضيه)

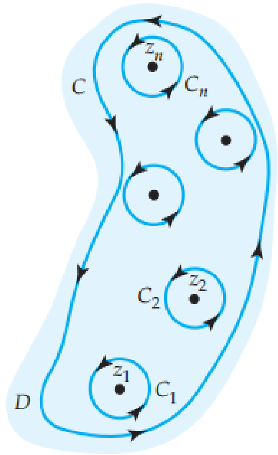
که C ساده او تړلی مسير د D په ناحيه کې وي، د f مختلطه تابع پر C او د هغه دننه، په استثنا د يو معين شمېر z_1 ، z_2 ، z_3....او z_n منفردو نقطو د C له دننه، هولومورف وي. نو

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Re\, s\,(f(z), z_k)$$

.(Bak & Newman, 2003; Ponnusamy, 2008)

ثبوت: فرضوو C_1 ، C_2 ، C_3....او C_n په ترتيب سره د z_1 ، z_2 ، z_3....و z_n مرکزونو لرونکو نقطو دايرې وي، او شعاع ګانې يې داسې وټاکل شي چې يوبل سره ګډې نقطې و نه لري او د D ناحيې د ننه پرتې وي، په دې صورت کې

$$\oint_C f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Re\, s\,(f(z), z_k)$$



۱شکل: د C دننه n منفردي نقطې

دکوشي د رېزېدوقضي کار وونه

د رېزېدو د ځانګړتيا څخه په ګټه اخيستنې سره، غواړوخينې مهم انتيګرالونه محاسبه کړو.

1.مثال: د $f(z) = z^{-3} \sin z$ تابع انتيګرال د ساعت د عقربې د حرکت مخالف جهت کې د واحدی دايرې پر مسير محاسبه کړئ(Stewart &Tall, 2018).

حل: د تابع د لورانت سلسله عبارت ده له

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \ldots$$

د $|z| > 0$ لپاره متقاربه ده، $z = 0$ يو د $f(z)$ درې مرتبه يې قطب دی، او رېزېدو يې $Res\,(f(z), 0) = a_{-1} = -\frac{1}{3!}$ ده، په نتيجه کې

$$\oint_C \frac{\sin z}{z^3} dz = 2\pi i\, Res\,(f(z), 0) = (2\pi i)\left(-\frac{1}{3!}\right) = \frac{\pi}{3} i$$

2. مثال: د $\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$ انتيګرال چېرته چې C د نيمې دايرې حلقوي مسير د $-R$ او R ترمنځ قطعه خط دی، محاسبه کړئ.

حل:

مروري آزاده لاسرسی

د $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ تابع د $e^{\frac{\pi i}{4}}$ او $e^{\frac{3\pi i}{4}}$ دوه ساده قطب لرونکي ده.او د ناطقو توابعو د رېزېډو د دستور مطابق لرو چي

$$Res\left(f(z),e^{\frac{\pi i}{4}}\right)=\left(\frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}}\right)=\frac{e^{\frac{-3\pi i}{4}}}{4}=\frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$$

$$Res\left(f(z),e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)=\left(\frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}}\right)=\frac{e^{\frac{-\pi i}{4}}}{4}=\frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

$$\oint_C\frac{dz}{z^4+1}=2\pi i\left[Res\left(f(z),e^{\frac{\pi i}{4}}\right)+Res\left(f(z),e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)\right]$$

$$=2\pi i\left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}}+\frac{1-i}{4\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-2}{4\sqrt{2}}\right)=\frac{-4i^2\pi}{4\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

کاروونه

ځيني حقيقي انتيګرالونه کولای شو چې د مناسبې تابع $f(z)$ د انتخاب پر C مناسب مسيرمحاسبه کړو.

په دې برخه کې څو ګټور مېتودونه د ځيني حقيقي انتيګرالونو د محاسبو لپاره له رېزېډو څخه په ګټه اخيستلو بيان کړو.

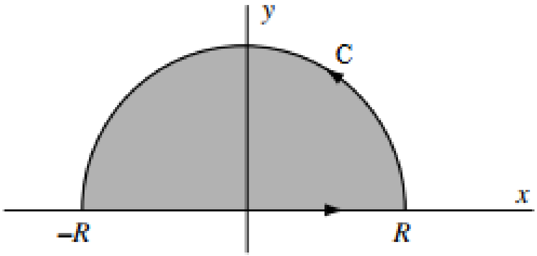
د غير عادي حقيقي انتيګرالونو محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$

د ځينو حقيقي انتيګرالونو محاسبه په معمولي مېتودونو ستونزمنه وي، داسې انتيګرالونه د مخلطو توابعو د ترکيب په توګه په پام کې نيولو سره او د مختلط انتيګرال نيوني ځانګړتيا ته په پام سره ځيني برخې يې صفر کېږي په نتيجه کې مطلوب انتيګرال محاسبه کېږي(Gamelin, 2001) .

که $|g(z)|\le M/R^k$ د $z=Re^{i\theta}$ لپاره ، $k>1$ او M ثابت عدد وي.نو

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_C g(z)dz\right|=0$$

په داسې حال کې چې C د R په شعاع، نيمه دايره ده.



۲ شکل: C د R په شعاع نيمه دايره (Brown & Churchill, 2009)

ثبوت: د انتيګرال ځانګړتيا ته په پام کې لروسره

$$\left|\int_C g(z)dz\right| < \frac{M}{R^k}\pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

څرنګه چې $L = \pi R$ د نيمه دايرې د قوس اوږد والی دی. نو

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_C g(z)dz\right| < \lim_{R\to\infty}\frac{\pi M}{R^{k-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty}\left|\int_C g(z)dz\right| = 0$$

نو

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_C g(z)dz\right| = 0$$

3.مثال : د $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1}$ انتيګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_0^\infty \frac{dz}{z^4+1}$ مختلط انتيګرال په پام کې نيسو، داسې چې که C د نيمې دايرې حلقوی مسير د $-R$ او R ترمنځ قطعه خط دی. دا انتيګرال د دوه انتيګرالونو د مجموعې په حيث د نيمه دايرې د اوږد والي او د مستقيم قطعه خط $[-R, R]$ په لاندې ډول ارائه کېږي.

$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = \int_{-R}^{R}\frac{dt}{t^4+1} + \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{R^4e^{4it}+1}\,dt$$

پوهېږو چې

$$\left|\int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{R^4e^{4it}+1}\,dt\right| \le \frac{\pi R}{R^4-1}$$

که $R \to \infty$ نو

مروري آزاده لاسرسی

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{iRe^{it}}{R^4e^{4it}+1}\,dt=0$$

نو

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}\frac{dt}{t^4+1}+\int_0^{\pi}\frac{iRe^{it}}{R^4e^{4it}+1}\,dt\right]=\oint_C\frac{dz}{z^4+1}$$

د 2 مثال په پام کې نیولو سره

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^4+1}+\underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{iRe^{it}}{R^4e^{4it}+1}\,dt}_{0}=\oint_C\frac{dz}{z^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

په نتیجه کې

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

د مثلثاتی انتیگرالونو محاسبه

حقیقي او مثلثاتي ناطق انتیگرالونه $\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$ د مختلط انتیگرالونو له جنسه پر واحده $|z|=1$ دایره چې مرکز یې د مختصاتو مبدأ وي، ارایه کېږي. په دې منظور د $z=e^{i\theta}$ پارامتری ارایه په $0\le\theta\le2\pi$ کې د واحدې دایرې لپاره په نظر کې نیسو.

په دې صورت کې

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\quad,\quad\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\quad,\quad dz=ie^{i\theta}d\theta$$

$$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta\quad,\quad z^{-1}=\frac{1}{z}=e^{-i\theta}$$

او

$$d\theta=\frac{dz}{iz}\quad,\quad\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}\quad,\quad\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}$$

د پورتني تعویضونو په پام کې نیولو سره د $\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$ حقیقي انتیگرالونه په یو مختلط انتیگرال پر C دایره باندی په لاندې ډول تبدیل کېږي (Howie, 2004).

$$\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta=\oint_C F\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)\frac{dz}{iz}$$

په داسې حال کې چې C، $|z|=1$ دایره وي.

مروري آزاده لاسرسی

4.مثال: د $\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\ d\theta$ انتيګرال محاسبه کړئ.

حل: د اړونده تعويضونو په تطبيق سره لرو چې

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\ d\theta=\oint_C\frac{1}{\left(2+\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz}=\frac{4}{i}\oint_C\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz$$

څرنګه چې $z+4z+1=(z-z_1)(z-z_2)$ د $z_1=-2-\sqrt{3}$ لپاره او $z_2=-2+\sqrt{3}$ ده.

$$f(z)=\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}=\frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$$

او $z_2=-2+\sqrt{3}$ د تابع دوه مرتبه يي قطب دی چې د دايرې دننه قرار لري، نو

$$\oint_C\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz=2\pi i\,Res\,(f(z),z_2)$$

$$=2\pi i\lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}[(z-z_2)^2f(z)]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to z_2}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-z_2)^2}=\lim_{z\to z_2}\frac{-z-z}{(z-z_1)^3}$$

$$=\frac{2\pi i}{6\sqrt{3}}=\frac{\pi i}{3\sqrt{3}}$$

په نتيجه کې

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\ d\theta=\frac{4}{i}\oint_C\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz=\frac{4}{i}\left(\frac{\pi i}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

دفوريه د انتيګرالونو محاسبه

د $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos m\,x\ dx$ او $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin m\,x\ dx$ انتيګرالونه د فوريه انتيګرالونو په نوم ياديږی. پوهيږو چې

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ e^{imx}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,(\cos m\,x+i\sin m\,x)dx$$

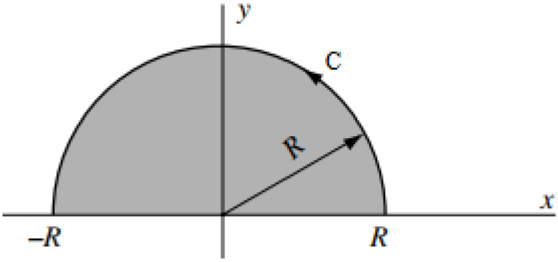
نو د فوريه انتيګرالونو محاسبه د $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ e^{imx}dx$ محاسبې ته ارجاع کيږي.

آزاده لاسرسی مروري

7.1 قضيه: که $|F(z)| \leq M/R^k$ د $z = Re^{i\theta}$ لپاره، او $k > 0$ او M ثابت اعداد وي. نو

$$\lim_{R\to\infty} \int_C e^{imz} f(z)dz = 0$$

په داسې حال کې چې C د شکل مطابق د نيم دايرې قوس او m مثبت ثابت عدد وی .(Brown & Churchill, 2009)



۳ شکل: C د نيم دايرې قوس

ثبوت: د $z = Re^{i\theta}$ لپاره

$$\int_C e^{imz} f(z)dz = \int_0^{\pi} e^{imRe^{i\theta}} f\left(Re^{i\theta}\right) \; i\,Re^{i\theta}\, d\,\theta$$

نو

$$\left|\int_0^{\pi} e^{imRe^{i\theta}} f\left(Re^{i\theta}\right) i\,Re^{i\theta}\, d\,\theta\right| \leq \int_0^{\pi} \left|e^{imRe^{i\theta}} f\left(Re^{i\theta}\right) iRe^{i\theta}\right| d\theta$$

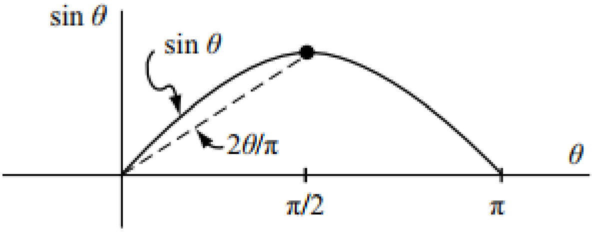
$$= \int_0^{\pi} \left|e^{im\,R\cos\theta - mR\sin\theta} f\left(Re^{i\theta}\right) iRe^{i\theta}\right| d\theta$$

$$= \int_0^{\pi\int} \left|e^{-mR\sin\theta} f\left(Re^{i\theta}\right) R\right|\Big|$$

$$\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta} d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\theta} d\theta$$

آزاده لاسرسی

مروري



۳ شکل: $\sin\theta \geq \frac{\pi}{2}$

له ۴ شکل څخه ليدل کيږي چې که $\sin\theta \geq \frac{\pi}{2}$ د $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ لپاره

$$\left|\int_0^{\pi} e^{imRe^{i\theta}} f\left(Re^{i\theta}\right) i\, Re^{i\theta}\, d\,\theta\right| \leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2mR\frac{\theta}{\pi}} d\theta$$
$$= \frac{\pi M}{mR^k}\left(1 - e^{-mR}\right)$$

که $R \to \infty$ دا مقدار صفر کيږي او څرنګه چې m او k ثابت دي، نو څکه

$$\lim_{R\to\infty} \int_C e^{imz} f\,(z)\; dz = 0$$

۵ مثال: وښاياست چې د $m > 0$ لپاره $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$
Churchill, 2009) (Brown &.

حل: د $\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz$ انتيګرال په C کې د شکل مطابق په پام کې نيسو. تر انتيګرال لاندي تابع په $z = \pm i$ کې د ساده قطب لرونکې ده او يوازې $z = i$ د C د ننه دی.

$$\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz = 2\pi i\, Re\, s\,(f(z), i)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to i}\left[(z-1)\frac{e^{imz}}{(z+i)(z-i)}\right] = 2\pi i\left(\frac{e^{-m}}{2i}\right) = \pi e^{-m}$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{imx}}{x^2+1}\,dx + \int_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = \pi e^{-m}$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{\cos m\,x}{x^2+1}\,dx + i\int_{-R}^{R}\frac{\sin m\,x}{x^2+1}\,dx + \int_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = \pi e^{-m}$$

$$2\int_{0}^{R}\frac{\cos m\,x}{x^2+1}\,dx + \int_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz = \pi e^{-m}$$

کله چې $R \to \infty$ د ښی خوا دویم انتیګرال صفر کېږي. په نتیجه کې

$$\int_{0}^{R}\frac{\cos m\,x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-m} \quad , \quad m > 0$$

مناقشه

په مختلط انالیز کې د رېزېدوګانو کاروونه د حقیقي انتیګرالونو په محاسبه کې ښایي په ځینو مواردو کې ستونزمن او پیچلي وي، نو د دې ستونزو د لرې کولو لپاره باید دا موضوع ډېره مطالعه شي.

د محدودیتونو او ستونزو درک موږ سره مرسته کوي تر څو ور څخه موثره ګټه واخلو او له احتمالی تېروتنوڅخه مخنیوی وکړو. دلته پر ځینو مواردو بحث او مناقشه کوو.

ځیني توابع ممکن چې په آساني د رېزېدو په کارونې سره د سپړنې (تحلیل) وړ نه وي. یعنې هغه توابع چې په خاصو نقطو کې غیر هولومورف یا پیچلي حل لري. ممکن چې نورو مېتودونو ته اړتیا ولري او همدارنګه په ځینو مواردو کې ممکن محاسبه پیچلې او وخت وړونکي وي. همدارنګه د مناسب مسیر ټاکل هم د انتیګرال نیونې لپاره مهم دی. څکه امکان لري چې په آساني د محاسبې وړ نه وي.

د رېزېدو ګانو استعمال د حقیقي انتیګرالونو د محاسبې او د مختلط انالیز د تحلیل لپاره کولای شي چې د محاسباتو لپاره په اسانتیا او دقت سره لازمه مرسته وکړي. مګر د مختلط انالیز مطالعې ته ډېره اړتیا لری. د مناسب مېتود ټاکل ، د تابع په نوعیت او د مسئلې دخاصو شرایطو پورې تړاو لري.

مروري

آزاده لاسرسی

پایله

په مختلط انالیز کې یو له گټورو تخنیکونو څخه د ځینو حقیقي انتیګرالونو د محاسبې لپاره له ریزېډو او اړوندو قضیو څخه ګټه اخیستنه ده، چې موږ ته اجازه راکوي تر څو حقیقي انتیګرالونه د مختلطو انتیګرالونو په ګټه اخیستنې سره محاسبه کړو. په پایله کې د ریزېډو او اړوند قضیو د مرور څخه وروسته لاندې پایلې په لاس راځي.

- که f په $z = z_0$ یوساده قطب ولري، نو

$$Re\,s\,(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}[(z - z_0)f(z)]$$

- که $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ داسی چې $p(z_0) \neq 0$ او $q(z)$ یوساده قطب په $z = z_0$ ولري، نو f هم په $z = z_0$ د ساده قطب لرونکی دی ، او

$$Re\,s\,(f(z), z_0) = \frac{p(z)}{q'(z)}$$

- که f په $z = z_0$ ، n مرتبه یی قطب ولري، نو

$$Re\,s\,(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z - z_0)^n f(z)\right]$$

د ریزېډو په مرسته سربیره پر مختلط انتیګرالونو، هغه حقیقي انتیګرالونه چې

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta \;\; \sin\theta)\;\; d\theta \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\;\; dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos m\,x\;\; dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin m\,x\;\; dx$$

شکل ولري حل کېږي.

وړاندیز

ریزېډوګاني او اړوند قضیې د مختلط انالېز خورا ګټه ور او بنسټیز بحث دی، چې په ګټه اخیستنې سره یې د ریاضیاتو او تطبیقي علومو په بېلا بېلو برخو کې کولای شو لازمي څېړنې وکړو.

وړاندیز کوم چې د ریزېډو او اړونده قضیو څخه په ګټه اخیستنې په راتلونکې کې د ریزېډو د قضیو او د ګرافونو تیوري ترمنځ د اړیکو په هکله څېړنې وشي.

آزاده لاسرسی

مروري

اخځلیکونه

Ablowitz, M.J. (2003) Complex Variables, Cambridge Text in Applied Mathematics,
Cambridge University.
Bak, J &. Newman, D.J. (2003). Complex Analysis, 2nd Ed., Springer, USA.
Beck, M., Marchesi, G., Pixton, D., & Sabalka, L. (2018). A first course in complex
analysis. Orthogonal Publishing.
Bourchtein, A.&Bourchtein, L. (2021). complex analysis. Springer Nature Singapore.
Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2009). Complex variables and applications. McGraw-
Hill.
Conway, John B. (2002) Functions of One Complex Variable, 2nd Ed. Springer
International Student Edition, New Delhi, Madras.
Gamelin, T. W. (2001). Complex analysis. Springer-Verlag New York.
Howie, J. M, (2004) Complex Analysis, Springer, London, Berlin, New York.
Marshall D. E. (2019). Complex Analysis. Cambridge University, United Kingdom.
Ponnusamy, S., (2008), Foundations of Complex Analysis, 2nd Edition, Narosa Publishing
House, New Delhi, Mumbai.
Priestley, H. A., (2006). Introduction to Complex Analysis, 2nd Ed., OXFORD University.
Stewart, I &Tall, D. (2018). Complex analysis, (Cambridge Mathematical Textbooks)
Cambridge University, United Kingdom.
Zakeri, S. (2021). *A Course in Complex Analysis*. Princeton University
Press.
Zill, D. G&Shanahan, P.D. (2003). Complex Analysis, United States of
America.