WNNS اثر،گل اغا جان. (۱۴۰۵). د وردگ پوهنتون د طبیعي علومو څېړنیز ژورنال، ۵ (۱):۱۱۰-۱۳۷

مروري

آزاده لاسرسی

په قسمي ډیفرانسیل معادلو کې د هانکل د تبدیل کارونه

پوهنیار گل اغا جان اثر[*1]، پوهنمل محمد خالد ستوری[1]

۱. د تطبیقي ریاضیاتو څانګه، ریاضیاتو پوهنځی، کابل پوهنتون، کابل، افغانستان.

*د مسئول لیکوال برېښنالیک: khstorai@ku.edu.af ، د اړیکې شمېره: ۰۹۳۷۶۶۷۹۲۹۰۴+

د مقالې تاریخچه:

د مقالې ترلاسه کولو نېټه: ۱۳/حمل/۱۴۰۵

د مقالې منلو نېټه: ۲۵/ثور/۱۴۰۵

د مقالې خپرولو نېټه: ۱۴/اسد/۱۴۰۵

ددې مقالې استناد:

اثر، گل اغاجان او همکاران (۱۴۰۵) په قسمي ډیفرانسیل معادلو کې د هانکل د تبدیل کارونه. وردگ علمي څېړنیزه مجله ۵ (۱):۱۱۰-۱۳۷.

دغه ژورنال د وردگ پوهنتون په چوکاټ کې د لوړو زدکړو وزارت د رسمي جواز پر اساس فعالیت کوي.

وردگ پوهنتون علمي څېړنیز نشرات (۱۴۰۵).

زمونږ سره اړیکې: ۰۹۳۷۴۵۶۰۶۳۱۷+

ایمیل: rjd@wu.edu.af

آدرس: سیدآباد ولسوالی، ټوپ دښته میدان وردگ ولایت- افغانستان

لنډیز

د هانکل بدلون یو مهم انتگرالي بدلون دی چې هسته یې د بیسیل تابعگانو پر بنسټ تعریف شوې ده او په ځانګړې ډول د هغو قسمي ډیفرانسیل معادلو د حل لپاره کارول کېږي چې په استوانوي او قطبي مختصاتو کې تعریف شوې وي او د یوه محور په اړه تناظر ولري. په دې څېړنه کې د هانکل بدلون د هغو قسمي ډیفرانسیل معادلو د حل لپاره کارول شوی چې د حل ساحه یې تر بې‌نهایته غځېدلې وي او حل یې باید محدود پاتې شي. په مقاله کې لومړی د هانکل بدلون اساسي تعریفونه، ځانګړتیاوې او معکوسه اړیکه څېړل شوې، وروسته د سرحدي ارزښت لرونکو مسایلو، لاپلاس معادلې، او د تودوخې د انتقال ځینې عملي مثالونه د هانکل بدلون په مرسته حل شوي دي. د دې میتود په وسیله قسمي ډیفرانسیل معادلې په عادي ډیفرانسیل معادلو بدلېږي، چې حل یې نسبتاً آسانه او محاسبوي پلوه اغېزمن وي. د څېړنې پایلې څرګندوي چې هانکل بدلون د محوري تناظر لرونکو او نامحدودو ساحو لرونکو فزیکي او انجینري مسایلو لپاره یو اغېزمن، دقیق او عملي تخنیک دی، چې نه یوازې محاسبات ساده کوي، بلکې محدود او فزیکي مفهوم لرونکې حلونه هم وړاندې کوي.

کلیدي کلمې: د هانکل بدلون، بیسیل تابع، استوانوي او قطبي مختصات، قسمي ډیفرانسیل معادلې، دایروي تناظر، لاپلاس معادله، سرحدي شرایط.

آزاده لاسرسی

مروري

Applications of the Hankel Transform in Solving Partial Differential Equations

Assistant Professor Gul Agha Jan Assar*[1], Assistant Professor Mohammad Khalid Storai[1]

1. Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics, Kabul University, Kabul, Afghanistan.

*Corresponding author Email: khstorai@ku.edu.af , Tel:+93766792904

Article History:
Received: 02.Apr.2026
Accepted: 14.May.2026
Online First:21.Aug.2026

Citation:
Assar, G., et al. (2026). Applications of the Hankel Transform in Solving Partial Differential Equations
. Articles to WNNS.
Wardek J of Soc Sci
2026; 5 (1):110-137

Email: rjd@wu.edu.af

This is an open access article under the Higher Education license

Copyright:© 2026
Published by Wardak Universty.

Abstract

The Hankel transform is an important integral transform whose kernel is defined based on Bessel functions. It is particularly useful for solving partial differential equations (PDEs) expressed in cylindrical and polar coordinates with axial symmetry. In this study, the Hankel transform is applied to solve PDEs whose domains extend to infinity while the solutions remain bounded.

The paper first presents the fundamental definitions, properties, and inverse relation of the Hankel transform. Subsequently, several applications involving boundary value problems, Laplace's equation, and heat transfer problems are investigated using the Hankel transform. By applying this method, the partial differential equations are reduced to ordinary differential equations, which are comparatively easier and more efficient to solve computationally. The results of this study demonstrate that the Hankel transform is an effective, accurate, and practical technique for solving physical and engineering problems involving axial symmetry and unbounded domains. Furthermore, this transform not only simplifies computations but also provides bounded solutions with clear physical interpretations.

Keywords: Hankel Transform, Bessel Function, Cylindrical and Polar Coordinates, Partial Differential Equations, Circular Symmetry, Laplace Equation, Boundary Conditions.

مروري آزاده لاسرسی

سریزه

په تطبیقي ریاضیاتو، فزیک او انجینري علومو کې قسمي ډیفرانسیل معادلې د هغو فزیکي او طبیعي پدیدو د ریاضیکي موډل کولو اساسي وسیله ګڼل کېږي چې د زمان او مکان تابع وي، لکه د تودوخې انتقال، د څپو خپرېدل، الکترومقناطیسي میدانونه، نوري سیستمونه او د سیالاتو حرکت. د دغو معادلو تحلیلي حل د علمي او تخنیکي ستونزو په تحلیل کې ځانګړې اهمیت لري، په ځانګړي ډول هغه مهال چې معادلې په استوانوي یا قطبي مختصاتو کې تعریف شوې وي او حلونه یې د یوه محور په اړه تناظر ولري(Debnath & Bhatta, 2014) .

د انتګرالي تبدیلونو میتودونه د قسمي ډیفرانسیل معادلو د حل له اغېزمنو تخنیکونو څخه شمېرل کېږي. په دې ډله کې د هانکل بدلون ځانګړی ځای لري، ځکه چې هسته یې د بیسیل تابعګانو پر بنسټ تعریف شوې ده او په طبیعي ډول د هغو مسایلو لپاره مناسب دی چې دایروي یا استوانوي تناظر ولري(Watson, 1995) . دغه بدلون کله ناکله د بیسیل د بدلون په نوم هم یادېږي.

د هانکل بدلون یوه مهمه ځانګړنه دا ده چې هغه متحول، چې په نامحدوده ساحه کې تعریف شوی وي، له معادلې څخه په موقتي ډول حذفوي او قسمي ډیفرانسیل معادله په عادي ډیفرانسیلي معادله بدلوي، چې حل یې نسبتاً آسانه وي(Sneddon, 1995) .

په وروستیو کلونو کې د هانکل بدلون کارونه د فزیک، نوري معلوماتو د پروسس، د تودوخې د انتقال، څپو او برښنایي میدانونو په تحلیل کې پراخه شوې ده. سره له دې، لا هم د هانکل بدلون د عملي تطبیق، د سرحدي شرایطو د تنظیم، او د معکوس بدلون د کارونې په برخه کې ځینې ستونزې موجودې دي، په ځانګړي ډول هغه مهال چې د حل ساحه تر بې‌نهایته غځېدلې وي او حل باید محدود پاتې شي.

په دې مقاله کې هڅه شوې ده چې د هانکل بدلون د هغو قسمي ډیفرانسیل معادلو په حل کې وکارول شي چې په استوانوي قطبي مختصاتو کې تعریف شوې وي، د یوه محور په اړه تناظر ولري، او د حل ساحه یې نامحدوده وي. په دې څېړنه کې لومړی د هانکل بدلون اساسي

تعريفونه، ځانګړتياوې او اړوند قضيې څېړل شوي، وروسته د بېلابېلو سرحدي مسايلو او فزيکي موډلونو لپاره د دغه بدلون عملي کارونه بيان شوي دي.

د دې څېړنې نوښت او اهميت په دې کې دی چې د هانکل بدلون د تيوري او عملي تطبيق ترمنځ اړيکه په منظم او تحليلي ډول روښانه کوي او ښيي چې دغه بدلون څنګه کولی شي د محوري تناظر لرونکو قسمي ډيفرانسيل معادلو د حل لپاره يو اغېزمن، دقيق او محاسبوي آسانه ميتود وړاندې کړي. همدارنګه، مقاله څرګندوي چې د هانکل بدلون کارونه نه يوازې د محاسباتو پېچلتيا کموي، بلکې د فزيکي مفهوم لرونکو محدودو حلونو په ترلاسه کولو کې هم مهم رول لري. د مقالې په پاتې برخو کې لومړی د هانکل بدلون اساسي تعريفونه او ځانګړتياوې وړاندې شوي، وروسته د قسمي ډيفرانسيل معادلو لپاره د دغه بدلون عملي کارونې او اړوند مثالونه څېړل شوي، او په پای کې پايلې او وړانديزونه وړاندې شوي دي.

۲. د هانکل بدلون اساسي تعريفونه

هغه تبديلونه چې د خطي انتګرالي تبديلونو له لارې تر لاسه کېږي او هسته يې د بيسيل تابع وي د هنکل د تبديلونو په نوم يادېږي. دې تبديلونو ته د بيسيل تبديلونه هم وايي. هنکل تبديلونه په طبيعي ډول هغه وخت رامنځته کېږي چې کله د سرحدي قيمتونو ستونزې حلېږي چې پکې محوري تناظر او استوانوي قطبي مختصات شامل وي.

که $f(r)$ د هر $r \geq 0$ لپاره تعريف وي نو هنکل n امه درجه تبديل چې په $\bar{f}(s)$ سره ښودل کېږي په لاندې ډول تعريف شوی دی.

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(r) r\, J_n(sr)\, dr \qquad (1)$$

په پورته اړيکه کې $J_n(sr)$ د بيسيل n امه درجه تابع ده، او هم (1) اړيکه متقاربه ده. چې $r\, J_n(sr)$ ته د هانکل د بدلون هسته وايي. د هنکل بدلون چې په (1) اړيکه کې تعريف شوی

دی په $\mathrm{H}_n\{f(r)\}$ یا $\mathrm{H}_n\{f(r).s\}$ یا $\mathrm{H}\{f(r)\}$ سره هم ښودل کیږي.چې دا بدلون په نامحدود بدلون سره هم مشهور دی.

۳. د هانکل بدلون ځانګړتیاوې

1. که f_1 او f_2 دوه تابع ګانې چې د $r \geq 0$ لپاره تعریف او $c_1.c_2$ دوه ثابت عددونه وي نو

$$\mathrm{H}_n\{c_1f_1(r)+c_2f_2(r)\}=c_1\mathrm{H}_n\{f_1(r)\}+c_2\mathrm{H}_n\{f_2(r)\}$$

ثبوت. د هانکل د بدلون د تعریف څخه په استفادې سره لرو چې

$$\mathrm{H}_n\{c_1f_1(r)+c_2f_2(r)\}=\int_0^\infty \{c_1f_1(r)+c_2f_2(r)\}r\,\mathrm{J}_n(sr)dr$$
$$=c_1\int_0^\infty f_1(r)r\,\mathrm{J}_n(sr)dr+c_2\int_0^\infty f_2(r)r\,\mathrm{J}_n(sr)dr$$
$$=c_1\mathrm{H}_n\{f_1(r)\}+c_2\mathrm{H}_n\{f_2(r)\}$$

2. که a ثابت او $\mathrm{H}_n\{f(r)\}=\bar{f}(s)$ وي نو $\mathrm{H}_n\{f(ar)\}=(1/a^2)\times\bar{f}(s/a)$ کیږي.

ثبوت. د هانکل د بدلون د تعریف څخه په استفادې سره لرو چې

$$\mathrm{H}_n\{f(r)\}=\bar{f}(s)=\int_0^\infty f(r)rf(sr)dr$$

همدارنګه

$$\mathrm{H}_n\{f(ar)\}=\int_0^\infty f(ar)r\,\mathrm{J}_n(sr)dr$$
$$=\int_0^\infty \frac{1}{a}\left\{f(y)\times\frac{y}{a}\times\mathrm{J}_n\left(\frac{sy}{a}\right)\right\}dy$$

که $ar=y$ تعویض کړو نو $dr=(1/a)\times dy$] په لاس راځي نو د لومړی اړیکې څخه په استفادې سره لرو چې

$$H_n\{f(ar)\} = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty f(r) r\, J_n\left(\frac{sr}{a}\right) dr = \frac{1}{a^2}\bar{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

مثال. که $rJ_l(sr)$ د هانکل د بدلون هسته وي نو د $(1/r^2)\times e^{-ar}$ تابع د هانکل بدلون په لاس راوړئ.

حل.

$$H_1\{1/r^2)\times e^{-ar}\} = \int_0^\infty \frac{1}{r^2} e^{-ar} r\, J_1(sr)dr = \int_0^\infty \frac{1}{r} e^{-ar}\, J_1(sr)dr$$

د تعریف په مرسته

$$H_1\{1/r^2)\times e^{-ar}\} = \int_0^\infty \frac{1}{r^2} e^{-ar} r\, J_1(sr)dr = \int_0^\infty \frac{1}{r} e^{-ar}\, J_1(sr)dr$$
$$= (1/s)\times\left\{(a^2+s^2)^{1/2} - a\right\}$$

د هانکل د بدلون معکوسه اړیکه

که $\bar{f}(s)$ د $f(r)$ لپاره د هانکل تبدیل وي نو

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(r) r J_n(sr) dr \qquad (i)$$

$$f(r) = \int_0^\infty \bar{f}(s) s J_n(sr) ds \qquad (ii)$$

وروستی اړیکه د $\bar{f}(s)$ د هانکل د بدلون معکوسه اړیکه ده چې هغه کولای شو په لاندې ډول ولیکو.

$f(r) = H^{-1}\{\bar{f}(s)\}$.

چې $f(r)$ ته د هانکل معکوس بدلون وایې چې په $\bar{f}(s)$ سره بنودل کیږي.

ثبوت: پوهیږو چې که $\bar{f}(p)$ د $f(x)$ کمپلیکس فوریر بدلون وي نو کولای شو ولیکو.

مروري آزاده لاسرسی

$$\bar{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ipx}dx. -\infty < x < \infty \Rightarrow f(x)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p)e^{-ipx}dp$$

بې له دې چې عمومیت له لاسه ورکړو ،کولای شو نوموړې پایله دوه متحوله ته تبدیل کړو.

$$\bar{f}(p.t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x.y)e^{i(px+y)}dxdy \qquad (2)$$

$$f(x.y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(p.t)e^{-i(px+y)}dpdt \qquad (3)$$

که په (2) او (3) اړیکه کې $x = r\cos\theta . y = r\sin\theta . p = s\cos\alpha . t =$ $s\sin\alpha$ تعویض کړو نو کولای شو ولیکو.

$$\bar{f}(s.\alpha) = \int_0^{\infty} rdr \int_0^{2\pi} f(r.\theta)e^{is\cos(\theta-\alpha)}d\theta \qquad (4)$$

$$\therefore\ f(r.\theta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty} sds \int_0^{2\pi} \bar{f}(s.\alpha)e^{-isr\cos(\theta-\alpha))}d\alpha \qquad (5)$$

$f(r.\theta)$ د یوې ځانګړې تابع $f(r)e^{-in\theta}$ په حیث په پام کې نیسو،چې پایله کې (5) اړیکه لاندې شکل غوره کوي.

$$\bar{f}(s.\alpha) = \int_0^{\infty} rf(r)dr \int_0^{2\pi} e^{i(-n\theta+sr\cos(\theta-\alpha))}d\theta \qquad (6)$$

که $\phi = \alpha - \theta - \pi/2$ وي نو (6) اړیکه لاندې شکل ځانته غوره کوي.

$$\bar{f}(s.\alpha) = \int_0^{\infty} rf(r)dr \int_0^{2\pi} e^{in(\phi-\alpha+\pi/2)+s\cos(-\phi-\pi/2))}d\phi$$

$$\bar{f}(s.\alpha) = \int_0^{\infty} rf(r)dr \int_0^{2\pi} e^{in(\pi/2-\alpha)}e^{in\phi+sr\cos(\phi+\pi/2))}d\phi$$

یا

$$\bar{f}(s.\alpha) = e^{ik(x/2-\alpha)} \int_0^{-} rf(r)dr \int_0^{2\pi} e^{i(n\phi-\mu r\sin\phi)} d\phi \qquad (7)$$

د بیسیل انتي ګرال څخه په استفادې سره لرو چې

$$\mathrm{J}_n(sr) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n\phi-r\sin\phi)} d\phi \qquad (8)$$

د (7) او (8) اړیکې څخه په استفادې سره په لاس راځي چې

$$\bar{f}(s.\alpha) = 2\pi e^{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \int_0^{\infty} f(r)r\mathbf{J}_n(sr)dr \qquad (9)$$

له (i) څخه لرو چې

$$\bar{f}(s) = \int_0^{e} f(r)r\,\mathrm{J}_n(sr)dr$$

له همدې امله (9) اړیکه په لاندې شکل بدلیږي.

$$\bar{f}(s.\alpha) = 2\pi e^{in\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\bar{f}(s) \qquad (10)$$

د (10) اړیکې په استفادې سره که $f(r.\theta) = f(r)e^{-in\theta}$ وي نو (5) اړیکه لاندې شکل غوره کوي.

$$f(r)e^{-in\theta} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty} sds \int_0^{2\pi} 2\pi e^{in\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\bar{f}(s)e^{-\,\mathrm{isrcos}(\theta-\alpha)}d\alpha$$

یا

$$f(r)e^{-in\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} s\bar{f}(s)ds \int_0^{2\pi} e^{i\left(n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\mathrm{scos}(\theta-\alpha)\right)}d\alpha \qquad (11)$$

که $\psi = \theta - \alpha + \pi/2$ وي نو (11) اړیکې څخه په لاس راځي چې

$$f(r)e^{-in\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} s\bar{f}(s)ds \int_0^{2\pi} e^{in(\psi-\theta)-\mathrm{isrcos}\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)}d\psi$$

یا

$$f(r)e^{-in\theta} = \frac{1}{2\pi}e^{-in\theta}\int_0^\infty s\bar{f}(s)ds\int_0^{2\pi} e^{i(n\psi - sr\sin\psi)} \qquad (12)$$

د مخکې په څیر لرو چې

$$\mathrm{J}_n(sr) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n\psi - sr\sin\psi)}d\psi$$

له همدې امله (12) اړیکې څخه لاندې پایله په لاس راځي.

$$f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \{s\bar{f}(s)\times 2\pi\,\mathrm{J}_n(sr)\}ds$$

نو

$$f(r) = \int_0^\infty \bar{f}(s)s\,\mathrm{J}_n(sr)ds$$

د هانکل د بدلون لپاره (ii) اړیکه ثبوت شوه.

د هانکل د بدلون لپاره د پارسوال قضیه

که د $f(r)$ او $g(r)$ تابع ګانو لپاره د هانکل بدلون په ترتیب سره په $\bar{f}(s)$ او $\bar{g}(s)$ سره وښیو، نو لاندې اړیکه سمه ده.

$$\int_0^\infty rf(r)g(r)dr = \int_0^\infty s\bar{f}(s)\bar{g}(s)ds$$

ثبوت. د هانکل او د هغه د معکوس بدلونونو له تعریفونو سره سم لرو چې

$$f(r) = \int_0^\infty \bar{f}(s)s\,\mathrm{J}_n(sr)ds \qquad (13)$$

$$\bar{g}(s) = \int_0^\infty g(r)r\,\mathrm{J}_n(sr)dr \qquad (14)$$

له دې ځایه د (13) اړیکې په استفادې سره کولای شو ولیکو.

$$\int_0^\infty s\bar{f}(s)\bar{g}(s)ds = \int_0^\infty s\bar{f}(s)\{\int_0^\infty g(r)r\,\mathrm{J}_n(sr)dr\}ds \qquad (15)$$

د (15) اړیکې د ښي لوري د انتي ګرال د درجې په تغیر سره په لاس راځي چې

$$\int_0^\infty s\bar{f}(s)\bar{g}(s)ds = \int_0^\infty r\,g(r)\left\{\int_0^\infty s\bar{f}(s)\ \mathrm{J}_n(sr)ds\right\}dr$$

یا د اولې اړیکې څخه په استفادې سره لرو چې

$$\int_0^\infty s\bar{f}(s)\bar{g}(s)ds = \int_0^\infty rg(r)\mathrm{f}(\mathrm{r})dr$$

مثال: د $1/r$ د هانکل تبدیل او هم د معکوسې اړیکې څخه په استفادې سره اصل تابع په لاس راوړئ.

حل. د تعریف څخه لرو چې

$$\mathrm{H}_n\{1/r\} = \int_0^\infty \{(1/r)\times r\}\mathrm{J}_n(sr)dr = \int_0^\infty \mathrm{J}_n(sr)dr \qquad (16)$$

پوهیږو چې

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_n(sr)dr = \frac{1}{s} \qquad (17)$$

د (16) او (17) اړیکې څخه لرو چې

$$\mathrm{H}_n\{1/r\} = 1/s = \bar{f}(s) \qquad (18)$$

دویمه برخه: که چیرې موږ ته $\bar{f}(s) = 1/s$ راکړل شوی وي نو د هانکل د معکوسې اړیکې څخه په لاس راځي چې

$$\mathrm{H}_n^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \int_0^\infty \bar{f}(s)s\,\mathrm{J}_n(sr)ds = \int_0^\infty \mathrm{J}_n(sr)ds.\ \text{as}\ \bar{f}(s) = \frac{1}{s}$$

د مخکې په څیر

$$\mathrm{H}_n^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \int_0^\infty \bar{f}(s)s\,\mathrm{J}_n(sr)ds = \int_0^\infty \mathrm{J}_n(sr)ds.\ \text{as}\ \bar{f}(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathrm{H}_n^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \frac{1}{r}$$

ځکه

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_n(sr)ds = 1/r$$

د مشتقي تابع د هانکل بدلون

که $\bar{f}_n(s)$ او $\bar{f}_n'(s)$ په ترتیب سره د $f(r)$ او $f'(r)$ تابع ګانو لپاره n امه درجه د هانکل تبدیلونه وي نو د هانکل تبدیل د تعریف څخه لرو چې

$$\bar{f}_n(s) = \int_0^\infty f(r)r\,\mathrm{J}_n(sr)dr \qquad (19)$$

$$\bar{f}_n'(s) = \int_0^\infty f'(r)r\,\mathrm{J}_n(sr)dr \qquad (20)$$

که د دویمي اړیکې ښی خوا د قسمي انتي ګرال په مرسته ساده کړو نو په لاس راځي چې.

$$\overline{f_n'}(s) = [r\,\mathrm{J}_n(sr)f(r)]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dr}\{r\,\mathrm{J}_n(sr)\}f(r)dr \qquad (21)$$

فرضوو چې که $r \to 0$ وکړي نو $rf(r) \to 0$ کیږي.یا که $r \to \infty$ وکړي نو (21) اړیکه لاندې شکل غوره کوي.

$$\overline{f_n'}(s) = -\int_0^\infty f(r)\{\mathrm{J}_n(sr) + sr\,\mathrm{J}_n'(sr)\}dr \qquad (22)$$

که په $r\,\mathrm{J}_n'(r) = r\,\mathrm{J}_{n-1}(r) - n\,\mathrm{J}_n(r)$ اړیکه کې د r په ځای sr وضع کړو نو $sr\,\mathrm{J}_n'(sr) = sr\,\mathrm{J}_{n-1}(sr) - n\,\mathrm{J}_n(sr)$ په لاس راځي.د نوموړې اړیکې څخه $srJ_n'(sr)$ قیمت په (22) اړیکه کې وضع کوو نو په لاس راځي چې.

$$\overline{f_n'}(s) = -\int_0^\infty f(r)\{J_n(sr) + sr\,J_{n-1}(sr) - n\,J_n(sr)\}dr$$

يا

$$\overline{f_n'}(s) = -\int_0^\infty f(r)\{(1-n)J_n(sr) + sr\,J_{n-1}(sr)\}dr \qquad (23)$$

د $sr\,J_n'(sr) = sr\,J_{n-1}(sr) - n\,J_n(sr)$ اړيکه مساوي ده له.

$$2n\,J_n(r) = r\{J_{n-1}(r) + J_{n+1}(r)\} \qquad (24)$$

که په (24) اړيکه کې د r په ځای sr وضع کړو نو په لاس راځي چې

$$2n\,J_n(sr) = sr\{J_{n-1}(sr) + J_{n+1}(sr)\}$$

چې د اخيري اړيکې څخه پايله په لاس راځي چې

$$J_n(sr) = (sr/2n) \times \{J_{n-1}(sr) + J_{n+1}(sr)\} \qquad (25)$$

که $J_n(sr)$ قيمت د (25) اړيکې په درلودلو سره په (23) اړيکه کې وضع کړو نو

$$\bar{f}_n'(s) = -\int_0^\infty f(r)\left[\frac{sr(1-n)}{2n}\{J_{n-1}(sr) + J_{n+1}(sr)\} + sr\,J_{n-1}(sr)\right]dr$$

يا

$$\overline{f_n'}(s) = -\int_0^\infty f(r)\{(1-n)J_n(sr) + sr\,J_{n-1}(sr)\}dr \qquad (26)$$

که په $2n\,J_n(sr) = sr\{J_{n-1}(sr) + J_{n+1}(sr)\}$ رجعي اړيکه کې د r په ځای sr وضع کړو نو په لاس راځي چې

$$2n\,J_n(sr) = sr\{J_{n-1}(sr) + J_{n+1}(sr)\}$$

په پايله کې

$$J_n(sr) = (sr/2n) \times \{J_{n-1}(sr) + J_{n+1}(sr)\} \qquad (27)$$

که د $J_n(sr)$ قیمت د (27) اړیکې په درلودلو سره په (26) اړیکه کې وضع کړو نو

$$\bar{f}'_n(s) = -\int_0^\infty f(r)\left[\frac{sr(1-n)}{2n}\{\mathrm{J}_{n-1}(sr) + \mathrm{J}_{n+1}(sr)\} + sr\,\mathrm{J}_{n-1}(sr)\right]dr$$

یا

$$\overline{f'_n}(s) = -\int_0^\infty f(r)\left\{\frac{1-n}{2n} sr\,\mathrm{J}_{n+1}(sr) + \left(\frac{1-n}{2n}+1\right) sr\,\mathrm{J}_{n-1}(sr)\right\}dr$$

یا

$$\overline{f'_n}(s) = \frac{s(n-1)}{2n}\int_0^\infty f(r) r\,\mathrm{J}_{n+1}(sr)dr - \frac{s(n+1)}{2n}\int_0^\infty f(r) r\,\mathrm{J}_{n+1}(sr)dr$$

یا

$$\bar{f}'_n(s) = -s\left\{\frac{n+1}{2n}\bar{f}_{n-1}(s) - \frac{n-1}{2n}\bar{f}_{n+1}(s)\right\} \qquad (28)$$

دارنگه چې $\bar{f}_{n-1}(s)$ او $\bar{f}_{n+1}(s)$ په ترتیب سره د $f(r)$، $(n-1)$ او $(n+1)$ ترتیب د هانکل تبدیلونه دي. (10) معادله د $f(r)$ د تابع n امه مرتبه مشتق $f'(r)$ د هانکل د تبدیل راښیي.

یادونه:

1. که په (10) اړیکه کې $n = 1$ وضع کړو نو

$$\overline{f'_1}(s) = -s\bar{f}(s)$$

2. که په (10) اړیکه کې $n = 2$ وضع کړو نو په لاس راځي چې

$$\overline{f_2'}(s) = -\left(\frac{s}{4}\right) \times \{3\bar{f_1}(s) - \overline{f_3}(s)\}$$

3.که په (10) اړیکه کې د $f(r)$ په ځای $f'(r)$ وضع کړو نو لرو چې

$$\bar{f_n}''(s) = -s\left\{\frac{n+1}{2n}\bar{f}'_{n-1}(s) - \frac{n-1}{2n}\bar{f}'_{n+1}(s)\right\}$$

4.که په (10) اړیکه کې د n په ځای $(n-1)$ او $(n+1)$ وضع کړو نو په لاس راځي

چې

$$\bar{f}'_{n-1}(s) = -s\left\{\frac{n}{2(n-1)}\bar{f}_{n-2}(s) - \frac{n-2}{2(n-1)}\bar{f_n}(s)\right\} \qquad (29)$$

$$\bar{f}'_{n+1}(s) = -s\left\{\frac{n+2}{2(n+1)}\bar{f_n}(s) - \frac{n}{2(n+1)}\bar{f}_{n+2}(s)\right\} \qquad (30)$$

که د $\bar{f}'_{n-1}(s)$ او $\bar{f}'_{n+1}(s)$ قیمتونه په $\bar{f_n}''(s) = -s\left\{\frac{n+1}{2n}\bar{f}'_{n-1}(s) - \frac{n-1}{2n}\bar{f}'_{n+1}(s)\right\}$ اړیکه کې وضع کړو نو

$$\bar{f_n}''(s) = s^2\left[\frac{n+1}{2n}\left\{\frac{n}{2(n-1)}\bar{f}_{n-2}(s) - \frac{n-2}{2(n-1)}\bar{f_n}(s)\right\} - \frac{n-1}{2n}\left\{\frac{n+2}{2(n+1)}\bar{f_n}(s) - \frac{n}{2(n+1)}\bar{f}_{n+2}(s)\right\}\right]$$

په همدې ترتیب

$$\bar{f_n}''(s) = \frac{s^2}{4}\left\{\frac{n+1}{n-1}\bar{f}_{n-2}(s) - \frac{2(n^2-3)}{n^2-1}\bar{f_n}(s) + \frac{n-1}{n+1}\bar{f}_{n+2}(s)\right\} \qquad (31)$$

د هانکل د بدلون بنسټیزې عملي ځانګړتیاوې

وښیاست چې $\int_0^\infty \{d^2f/dr^2 + (1/r) \times (df/dr) - (n^2/r^2) \times f\} r\,J_0(sr)dr = -s^2\bar{f}_n(s)$ دی،په نوموړې اړیکه کې $\bar{f}_n(s)$ د $f(r)$ ، n درجه بدلون دی.

ثبوت: د تعریف $- \mathrm{H}_n\left\{\frac{d^2f}{dr^2}\right\} = \int_0^\infty \frac{d^2f}{dr^2} r\,J_n(sr)dr = \left[r\,J_n(sr)\frac{df}{dr}\right]_0^\infty$ $\int_0^\infty \frac{d}{dr}\{r\,J_n(sr)\}\frac{df}{dr}dr$ په مرسته فرضوو چې کله $r \to 0$ او $r \to \infty$,وکړي نو $r(dfldr)$ صفر ته نیږدې کیږي.نو پورته اړیکه لاندې شکل غوره کوي.

$$\int_0^\infty \frac{d^2f}{dr^2} r\,J_n(sr)dr = -\int_0^\infty \frac{df}{dr}\frac{d}{dr}\{r\,J_n(sr)\}dr$$

$$\int_0^\infty \frac{d^2f}{dr^2} r\,J_n(sr)dr = -\int_0^\infty \frac{df}{dr}\{J_n(sr) + sr\,J_n'(sr)\}dr \qquad (32)$$

په (32) اړیکه کې $J_n'(sr)$ د $J_n(sr)$ مشتق نظر sr ته راښیي.

که د (32) معادلې د ښي لوري د انتي ګرال لومړی جمله چپ خواته انتقال کړو نو په لاس راځي چې.

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right) r\,J_n(sr)dr = -s\int_0^\infty \frac{df}{dr}\{r\,J_n'(sr)\}dr \qquad (33)$$

مخکې له دې چې د (33) اړیکې ښۍ خوا د قسمي انتي ګرال په مرسته ساده کړو نو کولای شو هغه په لاندې ډول ولیکو.

$$\int_0^\infty \frac{df}{dr}\{r\,J_n'(sr)\}dr = [r\,J_n'(sr)f(r)]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dr}\{r\,J_n'(sr)\}f(r)dr \quad (34)$$

فرض کړئ که $rf(r) \to 0$ وکړي نو $r \to 0$ او $r \to \infty$ دی چې (34) اړیکه لاندې شکل ځانته غوره کوي.

$$\int_0^\infty \frac{df}{dr} r\, J_n'(sr)dr = -\int_0^\infty f(r)\frac{d}{dr}\{r\, J_n'(sr)\}dr \qquad (35)$$

د (17) اړيکې څخه په استفادې سره ليکو چې

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right) r\, J_n(sr)dr = s\int_0^\infty f(r)\frac{d}{dr}\{r\, J_n'(sr)\}dr$$

څرنګه چې په $J_n(x)$ کې د بيسيل ديفرانسيلي معادلې صدق کوي نو.

$$\begin{aligned} d^2y/dr^2 + (1/r)\times(dy/dr) + \{1-(n^2/r^2)\}y = 0 \\ J_n''(r) + (1/r)\times J_n'(r) + \{1-(n^2/r^2)\}J_n(r) = 0 \end{aligned} \qquad (36)$$

په (36) اړيکه کې د r په ځای sr وضع کوو نو لرو چې

$$J_n''(sr) + \frac{1}{sr}J'(sr) + \left(1-\frac{n^2}{s^2r^2}\right)J_n(sr) = 0 \text{ or } sr\, J_n''(r) + J_n'(r) = -\left(sr-\frac{n^2}{s^2r^2}\right)J_n(sr)$$

په لاس راځي چې

$$\frac{d}{dr}\{r\, J_n'(sr)\} = -\left(sr-\frac{n^2}{s^2r^2}\right)J_n(sr) \qquad (37)$$

په ياد مو وي چې په پورته اړيکه کې $J_n'(sr)$ د بيسيل د تابع $J_n(sr)$ مشتق نظر د sr متحول ته دی.

د (35) او (37) اړيکو څخه لرو چې

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right) r\, J_n(sr)dr = -s\int_0^\infty f(r)\left(sr-\frac{n^2}{s^2r^2}\right)J_n(sr)dr$$

د ښي طرف د انتي ګرال دويم حد که چپ خواته انتقال کړو نو

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{n^2}{r^2}f\right) r\,\mathrm{J}_n(sr)dr = -s^2\int_0^\infty f(r)r\,\mathrm{J}_n(sr)dr$$

یا

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{n^2}{r^2}f\right) r\,\mathrm{J}_n(sr)dr = -s^2\bar{f}_n(s) \qquad (38)$$

چې $\bar{f}_n(s)$ د $f(r)$ د تابع n امه درجه د هانکل بدلون دی.

یادونه: (38) اړیکه د n په مختلفو قیمتونو سره لاندې مختلف شکلونه څانته غوره کوي.

1. که $n=0$ شي نو (38) اړیکه کې لاندې تغیر منځته راځي.

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right) r\,\mathrm{J}_0(sr)dr = -s^2\bar{f}_0(s)$$

چې $\bar{f}_0(s)$ د $f(r)$ صفري درجه د هانکل بدلون راښيي.

2. که $n=1$ شي نو (38) اړیکه کې لاندې تغیر منځته راځي.

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{f}{r^2}\right) r\,\mathrm{J}_1(sr)dr = -s^2\bar{f}_1(s)$$

چې $\bar{f}_1(s)$ د $f(r)$ اوله درجه د هانکل بدلون راښيي.

مثال: د $f(r)=(1/r)\times e^{-ar}$ اوله درجه د هانکل بدلون په لاس راوړئ.

حل. د لومړۍ یادونې څخه لرو چې

$$\mathrm{H}_1\left\{\frac{df}{dr}\right\} = \overline{f_1'}(s) = -s\bar{f}_0(s)$$

$$= -s\int_0^\infty f(r)rJ_0(sr)dr = -s\int_0^\infty e^{-ar}\,\mathrm{J}_0(sr)dr. \text{ as } f(r)=(1/r)\times e^{-ar}$$

$$= -s(a^2+s^2)^{-1/2}$$

۴. د سرحدي مسایلو لپاره د هانکل بدلون کارول

کله چې په متقاربو سرحدي مسایلو کار کوو، نو آسانه لاره یې داده چې استوانوي قطبي مختصات وکارول شي.که د متحول تحول د صفر څخه تر بې نهایت پورې وي نو کولای شو هغه د هانکل د بدلون په مرسته د موقت وخت لپاره له منځه یوسو چې لاسته راغلې یا د حل معادله به یو نوی متحول s ولري.په پای کې دا حل معکوس کوو ترڅو له لاسه ورکړی متحول بیرته لاسته راوړو.

د مستقیمې کارونې ځینې مهمې پایلې

که $u(r.z)$ د r او z یو تابع او $\bar{u}_0(s.z)$ یې نظر r متحول ته صفري درجه د هانکل بدلون وي نو د هانکل د بدلون له تعریف څخه لرو چې

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_0(s.z) = \int_0^\infty u(r.z)r\,J_0(sr)dr \qquad (39)$$

د لومړی یادونې څخه لرو

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) r\,J_0(sr)dr = -s^2\bar{u}_0(s.z) = -\dot{s}^2\bar{u}_0 \qquad (40)$$

د بلې خوا لرو چې

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} r\,J_0(sr)dr = \frac{d^2}{dz^2}\int_0^\infty u(r.z)r\,J_0(s.r)dr = \frac{d^2\bar{u}_0}{dz^2} \qquad (41)$$

څرګندونه: که $u(r.t)$ د r او t تابع او $\bar{u}_0(s.t)$ یې نظر د r متحول ته صفر درجه د هانکل بدلون وي نو د هانکل د بدلون له تعریف څخه لرو چې

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_0(s.t) = \int_0^\infty u(r.t)r\,J_0(sr)dr \qquad (42)$$

نو

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} r\,J_0(sr)dr = \frac{d^2}{dt^2}\int_0^\infty u(r.t)r\,J_0(sr)dr = \frac{d^2\bar{u}_0}{dt^2} \qquad (43)$$

د هانکل د معکوسې اړیکې څخه په استفادې سره لرو چې

$$u(r.z) = \int_0^\infty \bar{u}_0(s.z)s\,\mathrm{J}_0(sr)ds$$

یا

$$u(r.s) = 2\pi a\omega \int_0^\infty e^{-sz}\,\mathrm{J}_0(sa)\,\mathrm{J}_0(sr)ds$$

مثال(1)**:** معادله $(\partial^2u/\partial r^2) + (l/r) \times (\partial u\partial r) + (\partial^2u/\partial z^2) + f(r) =$

$0.r > 0.z > 0$ د لاندې سرحدي شرایطو لاندې حل کړئ.

(i) $u(r.0) = 0$

(ii) که u او f په ترتیب سره $r \to \infty$ او $z \to \infty$ شرطونهومني.

حل: که د $u(r.z)$ او $f(r)$ د هانکل بدلونونه نظر د r متحول ته په ترتیب سره $\bar{u}_0(s.z)$ او $\bar{f}_0(s)$ وي نو د هانکل بدلون له تعریف څخه لرو چې

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_0(s.z) = \int_0^\infty u(r.z)r\,\mathrm{J}_0(sr)dr \text{ او } \bar{f}_0(s) = \int_0^\infty f(r)r\,\mathrm{J}_0(sr)dr \quad (44)$$

نظر د r متحول ته د هانکل صفري درجه بدلون راکړل شوې قسمي دیفرانسیلي معادلې ته کولای شو داسې ولیکو.

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) r\,\mathrm{J}_0(sr)dr + \int_0^\infty \frac{\partial^2u}{\partial z^2} r\,\mathrm{J}_0(sr)dr + \int_0^\infty f(r)r\,\mathrm{J}_0(sr)dr = 0$$

د (44) اړیکې او مخکینیو پایلو په بنسټ کولای شو ولیکو.

$$-s^2\bar{u}_0 + (d^2\bar{u}_0/dz^2) + \bar{f}_0(s) = 0$$

یا

$$(\mathrm{D}^2 - s^2)\bar{u}_0 = -\bar{f}_0(s) \quad (45)$$

آزاده لاسرسی

مروري

دارنګه چې $D \equiv d/dz$ دی.

د (45) اړیکې کومکي معادله مساوي ده له.

$$D^2 - s^2 = 0 \Longrightarrow D = \pm s$$

له همدې امله C, F یا مشخص حل یې مساوي ده له.

$$Ae^{sz} + Be^{-sz}$$

چې A او B اختیاري ثابتونه دي.

د (45) اړیکې ځانګړی حل مساوي ده له

$$\frac{1}{D^2 - s^2}\{-\bar{f}_0(s)\} = -\bar{f}_0(s)\frac{1}{D^2 - s^2}e^{0,2} = -\frac{\bar{f}_0(s)}{0^2 - s^2} = \frac{\bar{f}_0(s)}{s^2}$$

عمومي حل یې په لاندې ډول دی

$$\bar{u}_0(s.z) = Ae^{sz} + Be^{-sz} + (1/s^2) \times \bar{f}_0(s) \qquad (46)$$

د محدود حل لپاره باید $A = 0$ شي، غیر له دې $\bar{u}_0(s.z) \to \infty$ کیږي کله چې $z \to \infty$ شي.په پایله کې $\bar{u}_0(s.z) \to \infty$ کیږي، په پایله کې (46) اړیکه لاندې شکل غوره کوي.

$$\bar{u}_0(s.z) = Be^{-sz} + (1/s^2) \times \bar{f}_0(s) \qquad (47)$$

د (i) راکړل شوي صفري درجه سرحدي شرایطو $u(r.0) = 0$ د هنکل بدلون نظر د r متحول ته اخلو.

$$\bar{u}_0(s.0) = 0 \qquad (48)$$

که په (47) اړیکه کې $z = 0$ وضع او (48) اړیکه استفاده کړو نو $B = -(1/s^2) \times \bar{f}_0(s)$ کیږي چېې په پایله کې د (47) اړیکې خخه په لاس راځي چې

$$\bar{u}_0(s.z) = (1/s^2) \times (1 - e^{-sz}) \times \bar{f}_0(s) \qquad (48)$$

د (48) اړیکې خخه په استفادې سره که د هانکل معکوسه اړیکه استفاده کړو نو په لاس راځي چې

$$u(r.z) = \int_0^\infty \bar{u}_0(s.z)s\,J_0(sr)ds$$

یا

$$u(r.s) = \int_0^\infty \bar{f}_0(s) \frac{1 - e^{-sz}}{s} \mathrm{J}_0(sr)ds$$

کوم چې د راکړل شوې سرحدي مسلې غوښتل شوی حل دی.

(2)**مثال:** $u(r.z)$ دایروي قرص پوتنشیل په لاس راوړئ، چې واحده شعاع ولري او مبدا یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او محور یې د z په محور او لاندې معادله صدق کړي.

$$(\partial^2 w/\partial r^2) + (l/r) \times (\partial u \partial r) + (\partial^2 u/\partial z^2) = 0.0 < r < \infty.z > 0$$

سرحدي شرایط یې په لاندې ډول وي.

(i) که $u = k$ او $z = 0.0 \leq r < 1$ وي.

(ii) که $\partial u/\partial z = 0$ وي کله چې $z = 0.r > 1$ وي.

دارنګه چې k د قرص فرضي پوتنشیل ثابت او (ii) شرط د $z = 0$ مستوي د تقارب څخه راپیدا شوی دی.

حل.

پوهیږو چې

$$(\partial^2 u/\partial r^2) + (1/r) \times (\partial u/\partial r) + (\partial^2 u/\partial z^2) = 0.0 < r < \infty.z > 0 \quad (49)$$

سرحدي شرایط

$$u(r.0) = k.\ \text{if}\ 0 \leq r < 1 \quad (50)$$

او

$$(\partial u/\partial z)_{z=0} = u_z(r.0) = 0.\ \text{if}\ r > 1 \quad (51)$$

که $\bar{u}_0(s.z)$ د $u(r.z)$ صفري مرتبه د هانکل تبدیل نظر r متحول ته وي. نو د هانکل تبدیل د تعریف څخه لرو چې.

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_0(s.z) = \int_0^\infty u(r.z)r\,\mathrm{J}_0(sr)dr \quad (52)$$

مروري آزاده لاسرسی

د (49) ديفرانسيل معادلې د هانکل تبديل نظر د r متحول ته اخلو نو.

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) r\,\mathrm{J}_0(sr)dr + \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} r\,\mathrm{J}_0(sr)dr = 0 \qquad (53)$$

د مخکينيو پايلو څخه په لاس راځي چې

$$-s^2\bar{u}_0 + (d^2\bar{u}_0/dz^2) = 0 \text{ or } (\mathrm{D}^2 - s^2)\bar{u}_0 = 0. \text{ where } \mathrm{D} \equiv d/dz \quad (54)$$

د (49) او (50) له مخې سرحدي شرطونه يو مخلوط شرطونه دي، په دې مانا چې u د $0 \leq r < 1$ له مخې او $\partial u/\partial z$ د $r > 1$ لپاره تاکل شوی دی.په داسې حالاتو کې ښه داده چې د (54) معادلې حل په لاس راوړو او مخکې د (50) او (3) شرطونو له استفادې څخه په حل کې د ثابتونو معلوم کړو.د مسلې تقارب ته په کتلو دا کافي ده چې ساحه د $z > 0$ لپاره په پام کې ونيسو.له دې ځايه د (54) معادلې عمومي حل مساوي ده له.

$$\bar{u}_0(s.z) = \mathrm{A}e^{sz} + \mathrm{B}e^{-sz} \qquad (55)$$

که A او B ثابت عددونه وي.

څکه $u(r.z)$ پوتنشيل هغه وخت صفر کيږي چې کله z بې نهايت ته تقرب وکړي.د دې لپاره موږ بايد په (55) معادله کې $\mathrm{A} = 0$ ونيسو.نو له دې ځايه (55) معادله لاندې شکل غوره کوي.

$$\bar{u}_0(s.z) = \mathrm{B}e^{-sz} \qquad (56)$$

B بايد له z څخه مستقل وي.

د هانکل په صفر ترتيب تبديل باندې که تبديلوونکی فورمول تطبيق کړو نو له (56) اړيکې څخه په لاس راځي چې.

$$u(r.z) = \int_0^\infty \bar{u}_0(s.z)s\,\mathrm{J}_0(sr)ds$$

يا

$$u(r.z)=\int_0^\infty \mathrm{B}(s)e^{-sz}s\,\mathrm{J}_0(sr)ds \tag{57}$$

په پورته اړیکو کې موږ د B په ځای $\mathrm{B}(s)$ لیکلی دی.

د (57) اړیکې څخه

$$\partial u/\partial z=u_z(r.z)=\int_0^\infty \mathrm{B}(s)e^{-sz}(-s^2)\mathrm{J}_0(sr)ds \tag{58}$$

که په (57) اړیکه کې $z=0$ وضع کړو نو

$$\int_0^\infty s\,\mathrm{B}(s)\mathrm{J}_0(sr)ds=u(r.0)\ ,\ \ 0\le r<1 \tag{58}$$

که په (10) اړیکه کې $z=0$ وضع کړو نو

$$\int_0^\infty s^2\,\mathrm{B}(s)\mathrm{J}_0(sr)ds=-u_z(r.0).,\ \ r>1 \tag{59}$$

د (49) او (58) اړیکې څخه لرو چې

$$\int_0^\infty s\,\mathrm{B}(s)\mathrm{J}_0(sr)ds=k.\ \text{for}\ \ 0\le r<1 \tag{60}$$

د (50) او (59) اړیکې څخه لرو چې

$$\int_0^\infty s^2\,\mathrm{B}(s)\mathrm{J}_0(sr)ds=0.\ \text{for}\ \ r>1 \tag{61}$$

د $\mathrm{B}(s)$ د پورته پایلو د مقایسې او د ښه پېژندل شویو پایلو څخه په لاندې ډول په لاس راځي.

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_0(sr)\frac{\sin s}{s}ds=\frac{\pi}{2}.\ \text{for}\ 0\le r<1 \tag{62}$$

او

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_0(sr)\sin s\,ds=0.\ \text{for}\ r>1 \tag{63}$$

په پایله کې د $\mathrm{B}(s)$ قیمت مساوي ده له.

$$B(s) = \left(\frac{2k}{\pi s^2}\right) \times \sin s$$

پورته قيمت په (57) معادله کې وضع کوو نو غوښتل شوی پوتنشيل $u(r.z)$ مساوي ده له.

$$u(r.z) = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty e^{-sz}\frac{\sin s}{s}\,J_0(sr)ds$$

۵. د تودوخې په انتقال کې د هنکل د تبديل کارول

د يو دايروي ډيسک له لارې چې شعاع يې a او د $z = 0$ په فضا کې موقيعت لري د واحدې ساحې او واحد وخت لپاره د ثابت نرخ Q په اندازه نيمي نامحدودې فضا $z > 0$ ته حرارت انتقاليري چې د چتکتيا ثابت يې K او د ډيسک بهرنی برخه $z = 0$ مستوي عايق شوې ده. د دې ډول ستونزې د موډل کولو لپاره تودوخه په $v(r.z)$ سره ښيو او د لاپلاس معادله د سرحدي شرايطو سره په پام کې نيسو.

$$-K\frac{\partial U(r.z)}{\partial z} = Q.r < a.z = 0 \qquad (64)$$
$$= 0.r > a.z = 0,$$

د ديفرانسيل معادلې د هنکل بدلون مساوي ده له.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(s.z) - s^2V(s.z) = 0 \qquad (65)$$

سرحدي شرايط هم کولای شو تبديل کړو.

$$-K\frac{\partial V}{\partial z}(s.0) = \frac{QaJ_1(as)}{s} \qquad (66)$$

کله چې z بې نهايت ته نيږدې شي نو د (1) معادلې حل محدود پاتې کيږي نو لرو چې

$$V(s.z) = A(s)e^{-sz}$$

د (66) شرط په کارولو سره لرو چې

$$A(s) = QaJ_1(as)/(Ks^2)$$

په پايله کې تودوخه مساوي ده له.

مروري آزاده لاسرسی

$$u(r.z) = \frac{Qa}{K}\int^{\infty} e^{-sz}\, e^{-sz} J_1(as) J_0(rs) s^{-1} ds \qquad (67)$$

مناقشه او پایله

بحث او تحلیلي ارزونه

د هانکل بدلون د هغو قسمي ډیفرانسیل معادلو لپاره ځانګړی اهمیت لري چې په استوانوي یا قطبي مختصاتو کې تعریف شوې وي او د یوه محور په اړوند تناظر ولري. د دې بدلون یوه مهمه ګټه دا ده چې هغه متحول، چې په نامحدوده ساحه کې تعریف شوی وي، له معادلې څخه حذف کوي او قسمي ډیفرانسیل معادله په عادي ډیفرانسیلي معادله بدلوي. دغه ځانګړنه د محاسباتو پیچلتیا کموي او د حل پروسه نسبتاً ساده کوي.

د لاپلاس او فوریه بدلونونو په پرتله، د هانکل بدلون په ځانګړي ډول د شعاعي تناظر لرونکو مسایلو لپاره مناسب دی، ځکه چې هسته یې د بیسیل تابعګانو پر بنسټ تعریف شوې ده. همدارنګه، دغه بدلون په هغو فزیکي مسایلو کې اغېزناک تمامېږي چې د حل ساحه تر بې‌نهایته غځېدلې وي او حل باید محدود پاتې شي. سره له دې، د هانکل بدلون کارونه ځینې محدودیتونه هم لري. دغه بدلون د هغو مسایلو لپاره چندان مناسب نه دی چې تناظر ونه لري یا حل یې په محدودو ساحو کې تعریف شوی وي. سربېره پر دې، د معکوس هانکل بدلون تطبیق په ځینو حالاتو کې محاسبوي ستونزې رامنځته کولی شي. په ټوله کې، د دې څېړنې پایلې څرګندوي چې هانکل بدلون د محوري تناظر لرونکو قسمي ډیفرانسیل معادلو د حل لپاره یو اغېزمن، دقیق او عملي تخنیک دی چې د فزیک او انجینري په ګڼو برخو کې کارېدلی شي.

پایله

په دې څېړنه کې د هانکل بدلون د هغو قسمي ډیفرانسیل معادلو د حل لپاره وکارول شو چې په استوانوي قطبي مختصاتو کې تعریف شوې وې او د یوه محور په اړه یې تناظر درلود. څېړنې وښودله چې د هانکل بدلون په مرسته قسمي ډیفرانسیل معادلې په عادي ډیفرانسیل معادلو بدلېدای شي، چې حل یې نسبتاً آسانه او محاسبوي پلوه اغېزمن وي. د دې مقالې پایلې

مروري آزاده لاسرسی

خرگندوي چې هانکل بدلون د نامحدودو ساحو او شعاعي تناظر لرونکو فزیکي او انجینري مسایلو لپاره یو مناسب او دقیق تخنیک دی. همدارنگه، د سرحدي شرایطو په موجودیت کې دغه بدلون کولی شي محدود او فزیکي مفهوم لرونکي حلونه وړاندې کړي. په دې څېړنه کې د لاپلاس معادلې، سرحدي مسایلو، او د تودوخې د انتقال ځینې عملي مثالونه هم وڅېړل شول، چې د هانکل بدلون د عملي ارزښت او محاسبوي آسانتیا څرگندونه کوي. په ټوله کې، هانکل بدلون د قسمي ډیفرانسیل معادلو د حل لپاره یو اغېزمن او ځواکمن میتود دی چې د فزیک، انجینري، اپتیک، او نورو تطبیقي علومو په گڼو برخو کې د کارونې وړتیا لري.

اخځلیکونه

Andrews, L. C., & Shivamoggi, B. K. (1999). **Integral transforms for engineers**. SPIE Press.

Bowman, F. (1958). **Introduction to Bessel functions**. Dover Publications.

Debnath, L., & Bhatta, D. (2014). **Integral transforms and their applications** (3rd ed.). CRC Press.

Erdélyi, A. (1954). **Tables of integral transforms** (Vols. 1–2). McGraw-Hill.

Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (2014). **Table of integrals, series, and products** (8th ed.). Academic Press.

Lebedev, N. N. (1972). *Special functions and their applications*. Dover Publications.

Oberhettinger, F. (1973). **Fourier transforms of distributions and their inverses**. Academic Press.

Polyanin, A. D., & Zaitsev, V. F. (2017). **Handbook of ordinary differential equations: Exact solutions, methods, and problems** (3rd ed.). CRC Press.

Sneddon, I. N. (1995). **Fourier transforms**. Dover Publications.

Watson, G. N. (1995). **A treatise on the theory of Bessel functions** (2nd ed.). Cambridge University Press.